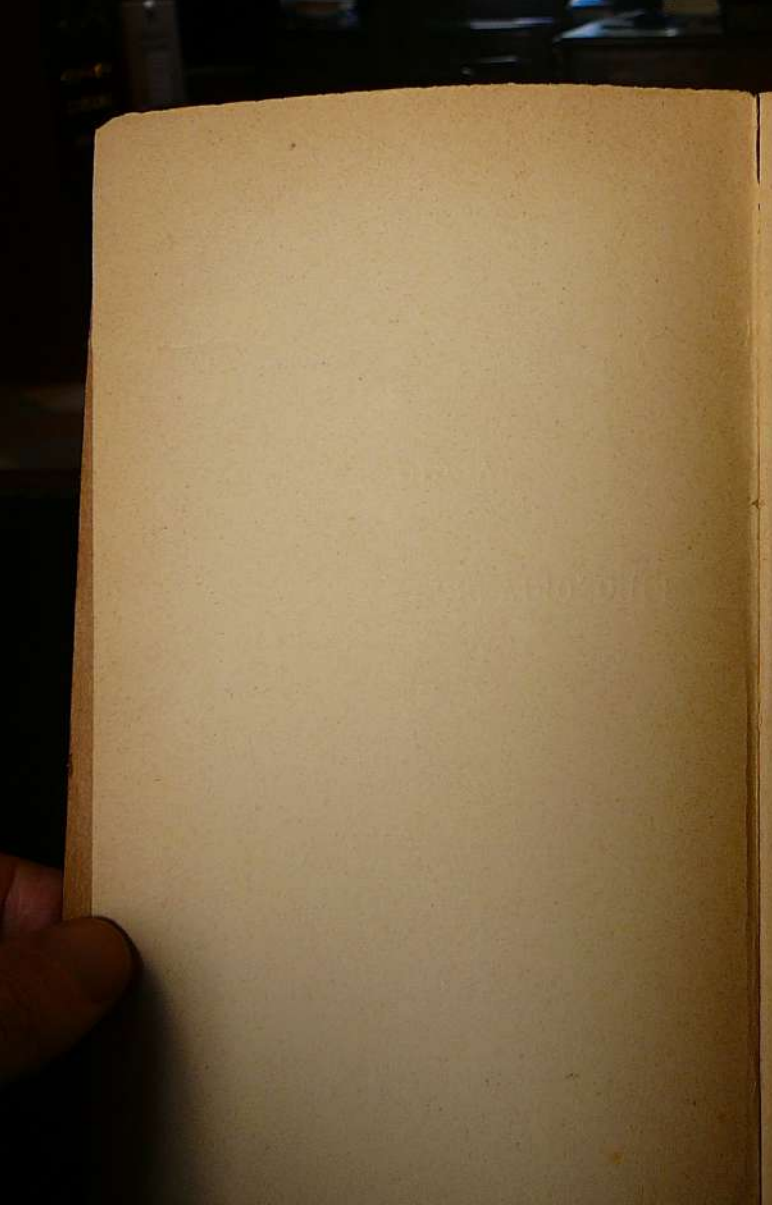
C. DE FREYCINET

# SAGGIO SULLA FILOSOFIA DELLE SCIENZE

Bari - 1906
GIUS. LATERZA
& FIGLI
Tipografi-editori-Librai

# SAGGIO

SULLA

# FILOSOFIA DELLE SCIENZE.

C. DE FREYCINET

# SAGGIO
SULLA
# FILOSOFIA
## DELLE SCIENZE

ANALISI - MECCANICA

*TRADUZIONE*

di EMILIO BARTOLI

1906.
GIUS. LATERZA & FIGLI
TIPOGRAFI-EDITORI-LIBRAI
BARI

## *DUE PAROLE DEL TRADUTTORE*

Parrà forse strano ch'io, ignaro delle matematiche superiori, mi sia assunto il compito di tradurre l'ESSAIS SUR LA PHILOSOPHIE DES SCIENCES di C. De Freycinet, opera che presenta non lievi difficoltà di forma, di concetti e di dottrina. Di fatto questo trattato è non solo nuovo nel suo genere, ma è denso di pensieri scientifici e filosofici e pieno di erudizione. A ciò s'aggiunge che il libro del De Freycinet è scritto in una forma elegante e in una lingua tutta brio, semplice e viva, che non ha nulla di compassato e dell'accademico. Le quali doti, come ognuno sa, difficilmente si possono emulare e serbare in una traduzione, che spesso, quantunque sia molto diligente, riesce una pallida immagine dell'originale.

Eppure, appena letto il primo capitolo, « *Lo spazio e il tempo* » mi sentii invogliato a procedere oltre e a cimentarmi nell'intento di dare tradotto in italiano questo bel lavoro. E invero il libro, che ora esce per la prima volta in Italia, ha il pregio di un'esposizione semplice e priva affatto d'ogni sorta di tecnicismo: per tal modo l'opera, sebbene contenga principî generali riguardanti l'analisi e la meccanica, è condotta senza il sussidio delle formule algebriche e senza citazioni e rappresentazioni di figure geometriche. In breve l'o-

pera è leggibile così da coloro, che professano matematiche, come da coloro, che professano filosofia; anzi, dirò cosa vera, per quanto possa parere assurda, il trattato scientifico del De Freycinet sarà letto e gustato più dai cultori di filosofia; poichè in esso l'autore, come è detto nella prefazione, cerca di risalire ai supremi principî, che governano le scienze astratte e le positive, limitandosi peculiarmente all'analisi e alla meccanica. In esso noi troviamo non tanto frequenti accenni a teoremi e a problemi di meccanica, di matematica, di geometria, di astronomia e di calcolo infinitesimale, quanto accenni a principî supremi di filosofia e a quei problemi filosofici, che oggigiorno affaticano le menti dei più robusti pensatori. Il De Freycinet poi dimostra in tutto il corso dell'opera erudizione e dottrina grandissima non solo nel campo delle matematiche e della storia delle matematiche; ma anche dei varî sistemi di filosofia antica e moderna e perfino dell'aridissima scolastica. E appunto perchè l'autore, in un argomento, che s'aggira intorno alle matematiche, ha saputo tenersi lontano dal tecnicismo e dall'aridità scientifica, che spesso finisce con lo stancare la mente del lettore, ha conseguito il fine di scrivere un libro, il quale, mentre non è pesante e indigesto, è d'altra parte utile, dilettevole e intelligibile anche a quei che sono poco intendenti dell'analisi infinitesimale e della meccanica.

Un semplice sguardo dato ai primi capitoli convincerà di quanto sopra è affermato; di fatto i concetti di **spazio, di tempo, dell'infinito, di continuità, di divisibilità all'infinito** ecc. sono veramente concetti filosofici e metafisici. Del resto le tre note **sulla realtà dello spazio e del tempo; sull'infinità dell'Universo; su d'un argomento del determinismo,** che occupano non so quante pagine dell'opera intera, sono pretta e pura

filosofia; le conclusioni poi, a cui giunge l'autore, vanno prese in seria considerazione dalla filosofia positiva e l'ultima specialmente dai filosofi deterministi.

La pubblicazione di quest'opera cade opportuna, a mio avviso, in Italia per due ragioni; prima perchè servirà come di reazione e di antidoto all'*odium antiphilosophicum*, da cui molti positivisti sono dominati, e per cui sostengono che oramai la psicologia e l'etica non ha più ragione d'essere, nè di venire insegnata nelle scuole; in secondo luogo, perchè servirà a disingannare quelli, che proclamano il fallimento della psicologia sperimentale e scientifica e della psichiatria, come pure di tutte le altre scienze sussidiarie della psicologia sperimentale.

Dal complesso dell'opera del nostro autore invece emerge evidente che il mondo non è governato solo dalle così dette leggi fisiche e materiali, ma anche da leggi psichiche. Consultisi a questo proposito le splendide pagine, dove tratta dell'idea di forza, in cui, esposta brevemente la teoria dinamica dei deterministi, conclude: *Ma anche se si ammette che gli animali, l'uomo in particolare, non possano creare del movimento — e io sono per me molto disposto ad ammetterlo — non ne risulta necessariamente una contradizione col fatto della libertà morale. Io credo al contrario, che le due proposte siano perfettamente conciliabili. Un esame più profondo del fenomeno risolve quest'apparente antinomia, come tenterò di dimostrarlo più oltre. In ogni caso io stimo così fondato il concludere dalle leggi dinamiche contro la libertà, come lo sarebbe il concludere dalla libertà contro le leggi dinamiche. Sono questi due ordini di idee distinte, tra cui mi pare chimerico il cercare punti di contatto e soprattutto analogia.* Il De Freycinet è seguace del precetto di A. Binet: « Les avantages de l'observation ne

s'éclipsent pas devant ceux de la spéculation, et ceux de la spéculation, à leur tour, ne portent pas atteinte à ceux de l'observation » (1). Però, ammettendo egli l'aiuto scambievole della speculazione e delle ipotesi geniali, con l'osservazione, fa poi una restrizione giustissima. A prova di ciò cito la chiusa dell'ultimo capitolo: « L'uomo trae vantaggio dalla sua maravigliosa attitudine a percepire, e spesso a intuire le verità fisiche; ma commetterebbe il più grave errore se, ricadendo nelle abitudini antiche, si fidasse ciecamente delle così dette armonie numeriche per affermare l'esistenza di certi corpi o per assegnar loro delle proprietà determinate. C'è, sotto questo rapporto, un abisso tra la scoperta di Le Verrier, che si basa sulla constatazione formale d'una perturbazione astronomica e il tentativo di Keplero, che cerca in una simmetria dei numeri la ragione delle deviazioni rispettive tra i pianeti e il sole. Questa specie d'induzioni sono a volte fortunatamente riconfermate dal fatto; ma quando non procedano, come quella di Le Verrier, da risultati forniti dall'osservazione, bisogna considerarle come eccezioni felici, il cui miraggio serve piuttosto a sedurre lo spirito, anzichè a guidarlo ».

Appare dunque ch'egli approva le dottrine psicofisiche, ma non forse in quel modo assoluto che prescrive il Binet: « Osservare e sperimentare; sperimentare ed osservare, non è solo un buon metodo, ma l'unico metodo che ci possa far ottenere una particella di verità, nel campo morale, come nel campo fisico ». Anzi il De Freycinet osserva giustamente: Sans doute ce parfait équilibre entre l'activité humaine et l'emprunt fait à la

(1) Alfred Binet, *L'ame et le Corps* - Paris.

Nature ne peut être constaté chaque fois avec la même précision. Il n'est pas facile de mesurer rigoureusement le travail mécanique et la dépense qui corrispondent à des nuances légères et fugitives de la pensée » [1].

Importa altresì rilevare che il De Freycinet giustamente ammette che spesso il genio è condotto alle invenzioni ed a scoperte da ardite ipotesi o divinazioni, le quali lo illuminano e lo guidano, nel corso arduo delle indagini e degli sperimenti, alla ricerca del vero per ciò che concerne le leggi fisiche. Come pure insiste sul fatto che le concezioni astratte degli antichi filosofi e matematici hanno conferito talvolta alle scienze positive, o a felici applicazioni nelle arti e nelle industrie [2].

In fine debbo avvertire che la presente traduzione fu fatta sulla 2ª edizione, la quale dall'autore fu migliorata di molto [3]. Di fatto nel capitolo VII, specie nelle ultime pagine è esplicata con più determinazione la nozione del lavoro e della forza viva; così pure qua e là ci sono dei ritocchi sulle leggi generali del movimento e una lunga nota per ciò che riguarda la scoperta della legge d'inerzia, che il nostro autore attribuisce a Keplero, invece che al Galileo. Pertanto nell'*Avvertenza* alla 2ª edizione parlando di questa sua opinione, che gli venne censurata, osserva: Dopo aver riveduti i testi originali, io persisto a credere che la legge d'inerzia sia stata scoperta da Keplero e che Galileo, la cui gloria non sarà perciò menomata, s'è ristretto a determinarla e a dimostrarne le conseguenze.

---

(1) V. *nota III*, pag. 327.

(2) Cfr. c. VIII sulla fine.

(3) *Avvertenza:* « Cette édition contient des changements d'une certaine importance. J'ai, notamment, présenté d'une façon plus directe, et en m'attachant à leur donner plus de relief, les notions de travail et de force vive, qui jouent un si grand rôle dans le Mecanique ».

Termino augurando al SAGGIO SULLA FILOSOFIA DELLE SCIENZE del De Freycinet la medesima sorte della STORIA DELLA GEOMETRIA di R. Klimpert, la quale, tradotta egregiamente dal Prof. Fantasia, è stata edita del pari dalla Ditta Laterza.

EMILIO BARTOLI.

*Bari, Marzo 1906.*

# PREFAZIONE.

Le scienze non si limitano soltanto ad allargare la sfera delle nostre cognizioni positive. Esse diventano a loro volta oggetto di studio per lo spirito, il quale ama di penetrarne il pensiero filosofico, di definire i loro metodi e procedimenti, di risalire fino ai loro principî e di cogliere i legami che li ricollegano alle idee generali, quasi sorgente comune a cui attingono le più astratte speculazioni, come le più semplici e comuni osservazioni. Una volta questo lavoro si faceva, per così dire, naturalmente. I limiti tra i differenti rami del sapere erano molto meno pronunciati, di quel che non siano adesso. I medesimi uomini erano ad un tempo geometri, fisici, filosofi. Senza menzionare gli antichi, basta citare, tra i moderni Galileo, Descartes, Newton, Leibnitz, Pascal, Eulero. Le più maravigliose scoperte non distoglievano i loro

occhi dall'enciclopedismo, ed essi non si sentivano soddisfatti se non avevano accoppiato i progressi della scienza con quelli della filosofia.

L'immensa estensione presa da più di un secolo per la specializzazione non permette più il sapere universale.

La vita umana è troppo breve e tra le diverse direzioni, anche i più grandi genî sono costretti di optare. AMPÈRE è l'ultimo, io credo, che abbia tentato di riunire nelle sue mani questa molteplicità di fili. D'ora innanzi non si vedrà più l'inventore d'un nuovo calcolo scrivere una Teodicea, o un discorso sul metodo, nè il creatore d'una teoria elettrodinamica escogitare una classificazione generale delle scienze. Sarebbe dunque, a parer mio, utile che gli scienziati di professione, interrompendo per un momento le loro ricerche, s'accordassero a far la sintesi della scienza coltivata da ciascuno e a raggrupparne i risultati essenziali in un quadro di natura tale, da attirare gli sguardi di chi ama la dottrina. Rivolgendosi così a un maggior numero di dotti, essi provocherebbero collaborazioni inaspettate, e faciliterebbero il progresso, che ordinariamente prepara la dif-

fusione delle cognizioni. Fornirebbero inoltre alla metafisica il vantaggio, a cui essa tende, di studiare cioè le facoltà umane in esercizio e di poter giudicare del valore dei metodi dalla qualità del profitto ottenuto.

Per conto mio ho tentato di effettuare questo pensiero su due rami delle matematiche, che ho studiate durante la mia giovinezza e che non ho mai perduto interamente di vista. L'analisi infinitesimale e la meccanica — è di esse che voglio parlare — hanno questo merito particolare di attirare l'attenzione, o a meglio dire, di colpire l'immaginazione, l'una per il carattere un po' misterioso del suo principio, l'altra per la sua applicazione ai problemi così ardui dell'astronomia. Quali sono, in realtà, queste nozioni di infinito e d'infinitamente piccolo, su cui l'analisi si fonda? In che cosa l'invenzione di Leibnitz differisce dall'algebra comune, con cui ognuno di noi s'è più o meno famigliarizzato? Per quali oscuri sentieri ci mena essa alla scoperta del vero, senza correr rischio di lasciare nel cammino qualche particella della precisione matematica? Nella meccanica qual'è la parte del ragionamento e quale quella dell'esperienza? Che c'è di necessario e di con-

tingente nelle leggi che noi seguiamo? Che cosa è che assicura la conservazione della forza e dell'energia nell'Universo? Possiamo noi prevedere un indebolimento graduale delle cause, che animano la materia sotto i nostri occhi?

Io ho tentato di rispondere a questi e ad altri quesiti. Ho voluto anche ridurre nei termini più semplici i concetti peculiari di queste due scienze. M'è parso che l'analisi derivi direttamente dalle idee di spazio e di tempo; e la meccanica da quelle di forza e di massa. In sostanza nei problemi dinamici più complessi noi ci studiamo sempre di indagare la relazione eterna, che la natura ha stabilita tra l'unità della forza e l'unità della massa. Tutto il resto non è che accessorio. Quanto all'analisi, non si vede punto come essa si sarebbe potuta costituire, se non possedessimo già, grazie allo spazio e al tempo, le nozioni d'infinità, di continuità, e quindi di divisione all'infinito e d'infinitamente piccolo.

Io ho cercato di presentare queste deduzioni senz'alcuno apparecchio tecnico. Le formule dell'algebra e le figure geometriche non sono indispensabili a questo genere di dimostrazione. Ho dovuto lasciar da parte un nu-

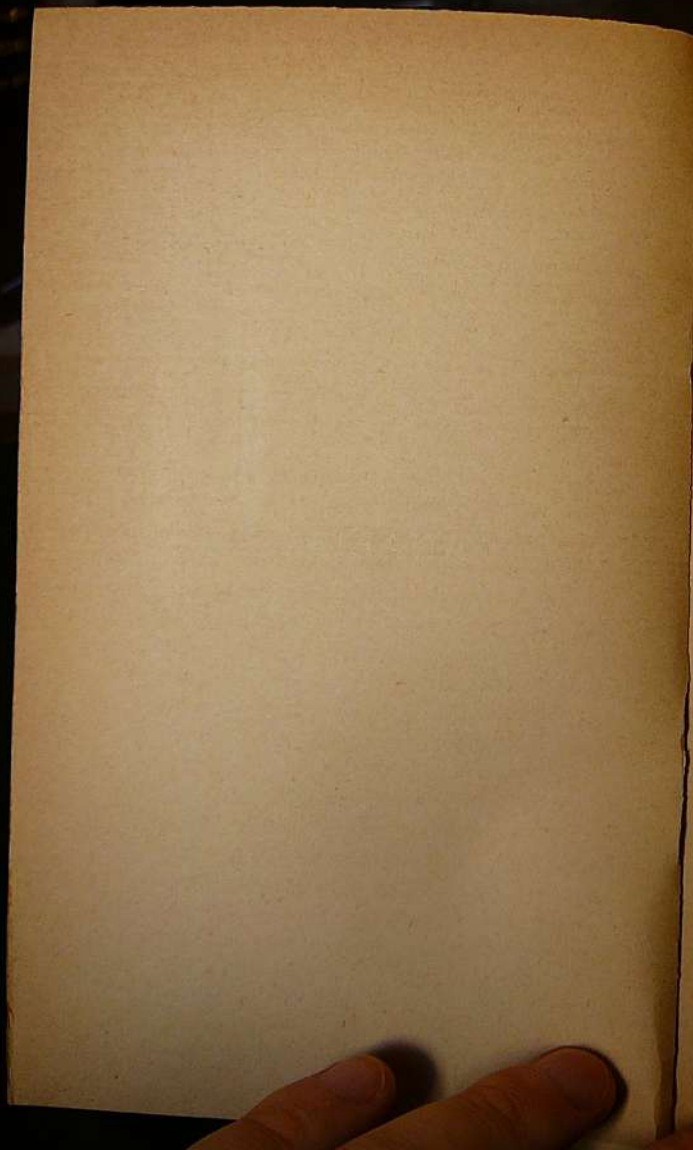
mero di questioni interessanti per fermarmi ai punti più salienti, a quelli che mi sembra che destino particolarmente le riflessioni degli spiriti colti. Ma ho invece affrontato in tre note speciali alcuni temi un po' estranei al mio argomento, ma che non ho potuto evitare interamente. È difficile analizzare la funzione del tempo e dello spazio in matematica e non fare in seguito un cenno alla discussione, che essi sollevano in filosofia. Nè è men difficile il considerare le trasformazioni dell'Universo, senza volgere un momento il pensiero al problema che ha appassionato tanti filosofi, quello cioè della sua infinità. Problema senza dubbio affatto insolubile, ma circa il quale la fisica moderna rende possibile peraltro qualche congettura. Infine il determinismo, avendo creduto di trovare un argomento nel teorema della conservazione dell'energia, io ho esaminato rapidamente il valore di questo preteso conflitto tra la libertà morale e le leggi, che governano la materia.

Io mi son proposto soprattutto, in questo studio di indicare la via in cui vedrei volentieri mettersi gli scienziati: Il mio scopo sarebbe raggiunto, se io potessi far determi-

nare alcuni di loro ad accreditare con la loro autorità questo genere di lavori, e se ispirassi fin d'ora a qualche letterato il desiderio di occuparsi delle due scienze, più facili a penetrare, di quel che non si creda; e che segnano uno dei più potenti sforzi dello spirito umano nella ricerca della verità.

---

# I.

# ANALISI.

# CAPITOLO I.

## Lo spazio e il tempo.

Le nozioni di spazio e di tempo hanno una funzione preponderante nella formazione delle scienze, sia matematiche, che fisiche. Non solamente esse sono implicite nella definizione dei principali oggetti, che queste scienze studiano, ma forniscono spesso degli elementi diretti per i calcoli. La geometria e la meccanica, in particolare, ricorrono continuamente alla misura dell' estensione e della durata. Nelle scienze stesse, in cui queste nozioni sembrano mancare, non è raro il trovare le tracce della loro influenza. I numeri dell'aritmetica e le quantità algebriche hanno incontestabilmente un carattere astratto. Ma, in origine, gli uni hanno designato collezioni di unità reali, derivanti per conseguenza dallo spazio e dal tempo; le altre hanno rappre-

sentato porzioni di estensione; ordinariamente parti di linea retta, che si prestavano meglio per la loro semplicità a rappresentare le variazioni della grandezza. Si può dunque chiedere: Che sarebbero divenute queste due preziose scienze, se le nozioni di spazio e di tempo fossero loro interamente mancate, e se noi ci fossimo dovuti contentar dei dati della sola logica?

Anche le idee di ordine e di classificazione, più generali, che le matematiche, sarebbero certo meno chiare, se non avessimo dinanzi agli occhi la prospettiva d'uno spazio indefinito, in cui gli oggetti si allineano, o si sovrappongono. D'altra parte i rapporti di causa a effetto, che dominano tutte le nostre conoscenze sulla natura, sono assolutamente legati all'idea di successione, cioè a dire di durata.

Io non tenterò di definire lo spazio e il tempo, ricordandomi il consiglio di Pascal: « Chi potrà mai definirlo (il tempo)? E perchè tentare di farlo, se tutti gli uomini percepiscono ciò che si vuol dire parlando del tempo, senza che si precisi di più? [1] ».

---

(1) *Pensées* di B. PASCAL, prima parte, art. II. — PASCAL dice pure: « Cet ordre le plus parfait entre les

Io non affronterò nemmeno la questione tanto controversa del carattere metafisico di queste nozioni. Sono esse *obiettive* o *subiettive*, come dicono i filosofi? Corrispondono esse a realtà fuori del nostro spirito, o sono pure forme della intelligenza? Questa disputa non è prossima a chiudersi e io temo che non finirà mai. Poichè, in queste materie, ciascuno si regola secondo la sua propria tendenza e su un complesso d'impressioni, spesso difficili ad analizzare; più che su d'una dimostrazione formale che non dia luogo a nessuna obiezione.

---

hommes consiste, non pas à tout définir ou à tout démontrer, ni aussi à ne rien définir ou à ne rien démontrer, mais à se tenir dans ce milieu de ne point définir les choses claires et entendues de tous les hommes, et de définir toutes les autres; de ne point prouver toutes les choses connues des hommes, et de prouver toutes les autres. Contre cet ordre pèchent également ceux qui entreprennent de tout définir et de tout prouver, et ceux qui négligent de le faire dans les choses qui ne sont pas évidentes d'elles-mêmes.

« C'est ce que la Géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune de ces choses, *espace, temps, mouvement, nombre, égalité*, ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on voudrait en faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction ».

D'altronde, questa questione, molto importante per la pura metafisica, è estranea al soggetto di cui mi occupo. La formazione e lo sviluppo delle scienze non si risentono della soluzione data a questa discussione preliminare. Che lo spazio e il tempo siano degli oggetti reali, o che soltanto ci sembrino tali, noi attribuiamo loro le stesse qualità; e queste sono, nel nostro spirito, il punto di partenza delle stesse deduzioni. Nessun geometra, ponendo l'equazione di un movimento, si chiederà se gli spazi percorsi e i tempi trascorsi hanno un valore obiettivo o subiettivo. Nessun fisico sarà preso da uno scrupolo simile, formulando la legge del raffreddamento nel vuoto o quella della trasmissione della luce. All'uno e all'altro basta che i calcoli siano sempre accertati dalla esperienza e che l'introduzione di simili elementi non porti mai oscurità nel linguaggio, nè confusione nelle idee. Per essi, l'estensione e la durata sono quantità che possono aumentare o diminuire in rapporto con le quantità naturali. La loro origine metafisica non influisce su l'applicazione che se ne può fare e sulle operazioni, a cui si associano.

La maggior parte degli uomini condivide

questa indifferenza. I rapporti sociali, in cui le questioni di spazio e di tempo hanno così larga applicazione, rimangono sottratti alle vicissitudini delle indagini filosofiche. Anche allorquando il carattere subiettivo di queste nozioni venisse ad essere universalmente riconosciuto, il linguaggio ordinario, la redazione delle leggi e dei contratti, le consuetudini della vita non ne riceverebbero modificazione alcuna.

Lo spazio e il tempo sono, o ci appaiono essere: necessari, infiniti, continui e omogenei.

Questa comunanza di caratteri giustifica la tendenza, che hanno sempre avuta i pensatori, ad avvicinarli nelle loro teorie. Essa spiega pure la soluzione identica data al problema, che si pone a proposito della loro realtà. Le scuole non hanno mai fatto distinzione tra essi sotto questo rapporto, e quando hanno accordato o rifiutato la realtà all'uno, l'hanno parimente accordata o rifiutata all'altra.

Accanto a questi caratteri, che sono i più importanti e su cui mi fermerò, conviene ricordare le numerose opinioni che da principio assegnavano allo spazio e al tempo una funzione tanto diversa nella genesi scientifica.

Lo spazio è da noi concepito in tre dimensioni. Il tempo ne ha una sola: si svolge in serie lineare. Tre coordinate sono indispensabili per determinare la posizione di un punto nello spazio. Una sola coordinata, la data, o la durata computata da un'epoca convenuta, basta, secondo la giusta osservazione di Cournot [1], per segnare l'ordine di un fenomeno nel tempo, di un avvenimento nella storia. Gli annali dell'umanità sono stati sempre compilati secondo questo metodo e nessuno s'è arrischiato di contestarne la precisione.

Lo spazio è invariabile e come finito. Esso non si modifica; è oggi ciò che era ieri, ciò che sarà domani. Il tempo si trasforma continuamente; i giorni si staccano successivamente dal futuro e cadono nel passato. Lo spazio è immobile. Il tempo è la mobilità stessa; avanza, o scorre in maniera ininterrotta. È legato, nel nostro pensiero, a tutti i cambiamenti, mentre lo spazio rappresenta la stabilità e la permanenza.

Lo spazio ci è rivelato dai sensi; l'occhio

---

(1) *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, vol. I, pagina 304.

ne scopre delle parti più o meno grandi e noi tocchiamo dei corpi che sono estesi. Il tempo cade unicamente sotto la percezione dell'intelligenza. Nessuno dei nostri sensi, nessuna delle nostre esperienze fisiche potrebbe darcene la più lieve idea. Noi non siamo in contatto con esso che per un istante, e questo istante è dileguato, prima che noi abbiamo potuto afferrarlo e appropriarcelo. Lungi dall'abbracciarne delle porzioni di qualche importanza, noi ci ricordiamo appena del suo passaggio, o piuttosto noi ci ricordiamo dei fenomeni che sono vincolati con esso; poichè senza questi fenomeni, la nozione del tempo passato resterebbe vaga e confusa nel nostro spirito.

I metafisici ritengono che, in mancanza di fatti esterni, il sentimento della nostra vita intima, la sola successione dei nostri pensieri basterebbe a darci l'idea del tempo. Al contrario, l'idea di spazio ha origine dal succedersi di impressioni venute di fuori e dal comunicare con la natura. Si vede già a quali ordini differenti di speculazione l'una e l'altra idea devano prestarsi.

Noi possiamo misurare direttamente lo spazio. Noi mettiamo a confronto gli spazi

tra di loro. Portiamo una linea retta su una linea retta, un piano sopra un piano; e possiamo dire quante volte una lunghezza ne contiene un'altra. Quando poi ci troviamo di fronte a spazi più complessi, linee curve, superficie o volumi, noi prendiamo a prestito dalla geometria dei procedimenti sicuri per ridurre la misura a quella degli spazi semplici. In fine tutto si riduce a un'operazione elementare, quasi meccanica: alla sovrapposizione di linee rette.

Non è così per la misura del tempo. Noi non possiamo ritenere e stabilire alcuna durata, affine di portarla su altre durate ugualmente fugaci e calcolare quante volte essa vi sarebbe contenuta. Il metodo diretto è impossibile. La misura del tempo non potrebbe essere che indiretta e convenzionale.

Rinunziando a determinare la durata noi le sostituiamo un segno esterno, un'unità convenuta in corrispondenza con essa. Noi stabiliamo di prendere per unità, non una parte di questo tempo, che ci sfugge, ma la durata, in sè indeterminabile, che passa durante il compimento d'un fenomeno determinato. Dopo per ogni durata proposta, noi ricerchiamo quante volte il fenomeno tipo possa

riprodurvisi. Così s'ottiene la misura di questa durata, vale a dire il suo rapporto con la durata del fenomeno tipo.

Le scienze offrono esempi frequenti di procedimenti analoghi. Le quantità che non cadono sotto le nostre osservazioni dirette, sono sostituite da altre che sono a loro proporzionali, o che noi giudichiamo tali, e la cui valutazione ci è più facile. Le cause si misurano dai loro effetti, o secondo alcune manifestazioni di cui la correlazione è bene determinata. La misura del tempo è un'operazione della stessa natura, tanto più logica in quanto in questo caso gli oggetti sono più semplici e la concordanza meno discutibile.

Ma occorre un'esperienza lunghissima perchè l'esattezza dei risultati ottenuti sia di per sè evidente, all'infuori di ogni altra considerazione. Che cosa ci autorizza a ritenere come uguali le durate corrispondenti al compimento di due fenomeni, identici in apparenza, osservati in due periodi differenti? Perchè questo vaso d'acqua si vuoterà sempre durante il medesimo tempo? perchè quella stella passerà di nuovo per quel meridiano dopo il medesimo intervallo? Perchè il valore intrinseco dell'ora o del minuto secondo non varieranno mai?

La nostra opinione a questo riguardo parte da una convinzione universale: « *Le leggi della natura sono costanti* ». Ma questa convinzione donde la deriviamo? Senza dubbio dall' esperienza. La pura ragione non ce la dà. Noi non riconosciamo *a priori* la necessità d'un'eguaglianza indefinita nella durata dei nostri giorni. Il fatto contrario, se accadesse, non contraddirebbe in niente le leggi del nostro intendimento. La misura del tempo quindi si basa sopra una verità relativa. La certezza che si lega ai risultati è improntata dello stesso carattere.

Assai differente è la certezza inerente alle misure di estensioni. La verità che le serve di base non è affatto legata all'ordine fisico. In mezzo ai più grandi sconvolgimenti noi continueremmo ad affermare che due linee rette i cui estremi coincidono sono uguali. Le variazioni del peso, l'accelerazione della terra sulla sua orbita, non infirmerebbero in nessun modo questo assioma. I risultati della misura delle estensioni – lasciando da parte, beninteso, gli errori materiali di calcolo – presentano dunque un carattere di verità assoluta.

Il corso del tempo è non solo continuo e irresistibile, ma ci appare uniforme. E non

basta dire: Ci pare essere la condizione e il tipo della uniformità. Senza il corso del tempo, noi non avremmo alcun mezzo di riconoscere l'uniformità dei fenomeni. Un fenomeno è detto da noi uniforme, allorchè si compie in esatta proporzione con la durata. Il movimento uniforme è quello, in cui gli spazi percorsi aumentano in ragione del tempo. Il getto d'una sorgente è uniforme, se il volume di acqua raccolta è proporzionale alla durata, o se essa è costante durante l'unità di tempo. Qualunque variazione, osservata in questo volume, sarebbe calcolata come un difetto di uniformità della sorgente; non ci verrebbe mai in mente di dire che il getto è rimasto invariabile e che invece è il corso del tempo che ha cessato d'essere uniforme.

Questa opinione inveterata e divenuta omai irrefragabile non è peraltro spontanea. Essa non ha ai nostri occhi il carattere di necessità, che offre l'idea stessa del tempo o quella della sua continuità. Essa è frutto d'un'esperienza lentamente acquisita e di cui la conclusione s'è formata quasi a nostra insaputa. Se ciascuno di noi avesse voluto riportarsi ciecamente alle proprie impressioni, quante volte non si sarebbe stati tentati di attribuire al

tempo un moto ineguale? Chi di noi non ha constatato frequentemente e spesso lamentato il suo cammino ora troppo lento e ora troppo rapido! Ma di fronte a queste impressioni momentanee si levano testimonianze più serie e durevoli. Fenomeni maravigliosi si svolgono intorno a noi, senza essere mossi dalle circostanze che ci turbano tanto vivamente. Il movimento del sole e delle stelle, insensibile alle nostre cause di gioia o di dolore, è là per avvertirci dell'errore gravissimo, che commetteremmo, riferendo a quell'immenso sistema il turbamento, che risiede in noi stessi. Dobbiamo quindi per forza annoverare fra le vane illusioni la variabilità a cui la nostra imaginazione era stato per un momento in preda. Sarebbe d'altra parte bastato por mente ai nostri simili: mentre il tempo rallentava il suo cammino per noi, lo accelerava per essi.

Ma se noi fossimo isolati gli uni dagli altri e privi dei grandi mezzi di riscontro che offre l'Universo, noi cadremmo, per ciò che riguarda il corso del tempo, in un errore analogo a quello, in cui erano caduti gli antichi, relativamente al movimento degli astri. Essi credevano che tutti girassero intorno alla

terra, come centro fisso del mondo. Parimenti noi, abbandonati ai nostri propri sentimenti, ci persuaderemmo che il tempo passa in maniera ineguale e cercheremmo altrove l'idea dell'uniformità, se tuttavia un pensiero simile potesse ancora trovar posto nella nostra intelligenza.

La natura, s'è detto da tanto tempo, offre lo spettacolo della perpetua evoluzione. Gli astri compiono il loro corso nei cieli. Sulla terra tutto cambia, tutto passa, tutto si trasforma. Gli animali, i vegetali crescono, spariscono e preparano con i loro avanzi l'origine di nuove razze. Le forze fisiche, chimiche, elettriche si disputano l'impero della materia; i fenomeni più vari s'incontrano, si urtano, si incrociano. L'occhio dell'uomo non cessa mai di contemplare novità e ricorsi.

Ciascuno dei fenomeni che attira la sua attenzione, ha la sua maniera di sviluppo. Ogni sviluppo si svolge in relazione col tempo.

Il moto di questo ultimo, il suo corso uniforme è il termine costante di comparazione. Da cui la nozione di *velocità*, o il rapporto tra la velocità del corpo e il tempo impiegato. Questa parola s'è applicata da principio al

più semplice dei fenomeni, al più facilmente visibile, a quello d'un corpo che si sposta in linea retta, con movimento uniforme. La velocità è il rapporto costante della distanza percorsa al tempo impiegato, o spazio costante percorso durante l'unità di tempo. Se il movimento cessa di essere uniforme, se si accelera, o si rallenta, la velocità è pure il rapporto dello spazio percorso al tempo; ma solamente quando questo tempo è abbastanza breve, perchè il movimento non abbia subìto variazioni sensibili nell'intervallo e perchè possa essere considerato come uniforme.

La stessa nozione di velocità è estesa a tutti i fenomeni, nei quali un rapporto fisso può essere percepito tra il cambiamento osservato e il tempo impiegato. In questo senso si dice: la velocità di raffreddamento d'un corpo, la velocità di evaporazione di un liquido, la velocità di gonfiamento di un areostato; perchè si può misurare la quantità di calore perduto, la massa di liquido evaporata, o l'accrescimento di volume dell'areostato, durante l'unità di tempo. Si va più oltre e si applica questo termine a fenomeni sociali, o meglio a sintesi di fatti, nei quali la risultante generale sfugge alla investiga-

zione diretta e si manifesta soltanto col sussidio delle statistiche, che permettono di giungere a una concezione di un complesso. È così che con una metafora, d'altronde opportunissima, i sociologi registrano la velocità d'accrescimento della ricchezza pubblica o della popolazione, della criminalità o degli accidenti, la velocità del propagarsi di un flagello, di una dottrina, di una religione. In tutti questi esempi noi ci proponiamo di valutare l'importanza del fenomeno e rendercene conto secondo il numero dei fatti individuali, rilevati durante un periodo determinato, sempre lo stesso per i fatti della medesima natura. Non c'è mezzo di paragone più semplice e più adatto al nostro spirito. Perciò la velocità, nei casi più elementari, nei movimenti rettilinei, è contemporanea alle prime osservazioni scientifiche dell'umanità. Essa procede direttamente dalla nozione del tempo e dalla sua uniformità.

I geometri sviluppando, secondo la loro tendenza, l'idea attinta al principio comune, hanno ragguagliato all'unità di tempo le variazioni di moto constatate in due periodi differenti. In fatti, il corso di un fenomeno non precipita, nè rallenta in modo regolare

nelle fasi successive. Ma si modifica ora più celeremente, ora più lentamente. Questo accrescimento o diminuzione di velocità, da un periodo all'altro, costituisce un elemento paragonabile a quello dell'accrescimento o dello spazio percorso, durante l'unità di tempo; vale a dire la velocità della « variazione della velocità ». Essi hanno chiamato questa velocità di secondo ordine *accelerazione* e l'applicano spesso nelle loro speculazioni sulla meccanica. Essi vi scorgono specialmente la misura della causa, spesso ignota, grazie a cui questa variazione della velocità guadagna o perde in intensità.

Lo spazio e il tempo corrispondono a due ordini di cognizioni molto distinte. Lo spazio è il dominio delle scienze, che trascurando il cambiamento, cercano i rapporti eterni delle cose. La più eminente è la geometria. Le figure da essa tracciate, o i modi di limitazione della estensione, non implicano la considerazione del tempo. Le loro proprietà ne sono indipendenti. Le equazioni stabilite tra i loro elementi non ne fanno menzione. A più forte ragione l'algebra e l'aritmetica gli rimangono estranee. Esse hanno trovato in esso, come

nello spazio, un aiuto utile per costituirsi, ma non gli sono subordinate. Espressioni della pura logica, esse esistono all' infuori di ogni condizione di estensione e di durata.

La geometria ricorre spesso a una apparenza di movimento. Essa suppone che delle linee o delle superficie generino delle figure, spostandosi secondo una legge data. Ma questi movimenti sono astratti, come le quantità dell' algebra. Non hanno legame alcuno col tempo, nè con nessuno degli elementi implicati nella traslazione di un corpo. Sia che si effettuino molto presto o molto lentamente; il risultato non può essere differente. Le proprietà sole di queste figure interessano. Nella rotazione d'un cerchio, che genera una sfera, o di un rettangolo che genera un cilindro, il tempo non è valutato. Il movimento supposto è una semplice operazione intellettuale, un artifizio di descrizione. Da questo punto di vista, lo studio delle macchine, ridotto a quello delle posizioni scambievoli delle diverse parti, rientra nella geometria. Lo spostamento di alcuni punti, o anche di un solo, produce il cambiamento di posizione di tutti gli altri, in virtù di leggi matematiche, nelle quali non devono intervenire nè la durata, nè le forze, nè le masse.

La statica o scienza dell'equilibrio (tranne quando si vuole darle alcune basi sperimentali, ciò che non si fa sempre) fa anche a meno della durata. I rapporti tra le forze sussistono in ogni tempo. Il sistema su cui esse si neutralizzano, è invariabile di forma, e se varia, è astrattamente; si tratta in realtà di figure successive, riconducendosi l'una all'altra secondo una legge semplice. Il famoso teorema delle velocità virtuali non è in fondo se non una proposizione di geometria.

Nell'Universo il quale ci sembrerebbe immobile e senza vita, se mancasse il tempo, l'entrata in scena di questo elemento è la condizione di tutti i fenomeni. Dalla maestosa librazione degli astri fino alla impercettibile vibrazione della molecola, ogni cosa che si muove o che muta è soggetta al tempo. È la condizione della vita e l'anima di questa perpetua evoluzione, di cui tentiamo invano di penetrare il mistero. Le scienze, che si propongono lo studio dei fenomeni, devono tutte quindi fare i conti con esso. La prima delle scienze fisiche, la meccanica, non se ne separa mai. Spazio, tempo, velocità sono per essa tre

concetti inseparabili [1]. La ragione umana li associa in ogni legge della dinamica. Essa li ritrova, in gradi diversi, nelle innumerevoli trasformazioni di cui la natura è teatro. Alle volte essa trascura uno di essi, la cui funzione sembra minima, ma non oserebbe eliminarlo interamente. Nelle reazioni chimiche, fa spesso astrazione dalla durata, perchè l'importanza è soprattutto nella reazione stessa, e il tempo importa poco; ma non è per ciò meno il fattore indispensabile dell'operazione. In geologia, invece, l'interesse che si lega alla considerazione dello spazio, è secondario dinanzi all'esame delle forze in gioco e dei risultati, che esse hanno prodotti durante la serie dei secoli.

Così tutte le scienze sono più o meno debitrici al tempo e allo spazio e spesso a tutti e due. Ma se alcune tra esse possono fondarsi sullo spazio solo, non ce n'è una, che possa bastare a sè stessa mediante il tempo. La ragione ne è semplice: lo spazio, con le sue tre dimensioni necessarie, dà origine a ogni specie di combinazione. Il nu-

(1) La velocità è la sintesi delle due idee di spazio e di tempo.

mero delle figure geometriche è illimitato e le loro proprietà sono inesauribili. Al contrario, il tempo, con la sua dimensione unica, non potrebbe prestarsi a nessuna speculazione. Tutt'al più, per la suddivisione della linea retta, che lo rappresenta, si potrebbe riprodurre qualche cosa di analogo alla successione dei numeri. Ma già questa linea retta, di cui il tipo appartiene allo spazio, è stata studiata in geometria. Essa è stata oggetto di deduzioni a cui il tempo non ha per niente contribuito e non è più suscettibile di ispirarne altre.

La nozione del tempo non può dunque, per sè stessa, generare nessuna concatenazione scientifica. Perchè essa compia una sì alta missione, bisogna associarla all'idea di spazio. Allora essa diviene di una fecondità incomparabile. Essa vivifica tutte le scienze, che tendono a stabilire i rapporti delle cause con i loro effetti. Essa forma la base di tutte le ricerche che si propongono come oggetto la determinazione delle leggi della natura e la descrizione dei suoi procedimenti.

## CAPITOLO II.

### L' INFINITO.

Ognuno di noi ha vive nella memoria le ammirabili riflessioni di Pascal sull' infinito. Quale intelligenza approfondì più di lui la meditazione di questo concetto grandioso? Chi visse più direttamente di fronte a questa idea maravigliosa, di cui noi cercheremmo invano la rappresentazione anche lontana? Per Pascal, l'infinito è concepito dalla ragione trascendentale, senza la quale, egli diceva, non si è geometri. Come, in fatti, l'osservazione può suggerire l' idea dell' infinito? L' osservazione è sempre limitata, essa abbraccia sempre un orizzonte circoscritto.

Senza dubbio, per la maggior parte degli oggetti accessibili alla nostra conoscenza, noi studiamo prima una parte limitata, spesso molto tenue, e induciamo in seguito « dal piccolo al grande », « dalla parte al tutto ». Ma come questo procedimento ci servirebbe

per percepire l'infinito? L'infinito non è un tutto, di cui il finito sia una parte. L'infinito non ha parti. Tra il finito e l'infinito non c'è una misura comune, non gradazione, non rapporto. L'infinito è, e niente all'infuori di esso stesso può fornire l'idea di ciò che esso è. Ogni percezione del finito è non solo assai differente, ma opposta: essa non si riconnette all'infinito, lo esclude.

Per difetto di riflessione si cade spesso in un'illusione, contro cui per altro i filosofi hanno avuto cura di metterci in guardia: si confonde l'infinito con l'indefinito. Il linguaggio matematico si presta casualmente a questo. Con l'uso di espressioni quali: « divisione all'infinito », « infinitamente piccolo », invece di *divisione indefinita, indefinitamente decrescente,* esso produce la confusione delle due idee. Certo i veri geometri non s'ingannano. Niente è più differente ai loro occhi, che l'indefinito e l'infinito. L'indefinito è semplicemente il finito, a cui s'aggiunge la nozione del variabile. I contorni diventano allora vaghi e indeterminati, ma la natura del finito non muta. Per quanto indeterminato, non cessa di essere finito, e questa indeterminatezza, estranea alla essenza delle cose, non potrebbe generare confusione nelle menti riflessive.

Se noi abbiamo la facoltà di allargare incessantemente il finito, di ampliarne sempre più i limiti, è perchè noi possediamo già la nozione dell'infinito. Al di là di quei limiti, momentaneamente posti, la ragione riconosce un campo illimitato, nel quale l'immaginazione può liberamente spaziare. Ma con un cammino progressivo noi non coglieremmo mai l'infinito; non ne supporremmo nemmeno l'esistenza. Resteremmo nel dominio del finito, del finito vastissimo; ma separato sempre dall'infinito da un abisso insuperabile. Lungi quindi dall'ammettere che l'indefinito conduca all'infinito, è l'infinito al contrario che rende possibile l'indefinito, e tutte le ipotesi sulla grandezza.

Donde origina la nozione dell'infinito?

Le persone predominate dal sentimento poetico o religioso ammettono volentieri che lo spettacolo dell'Universo sia di natura tale, da suscitare in noi una simile idea. Che cosa conferisce di più, dicono esse, a farla nascere, se non la vista di queste maraviglie, la contemplazione del cielo stellato, di questi astri innumerevoli che popolano il firmamento? Non è là l'infinito nella immensità e nella

durata, così come nella potenza dell'Ente supremo che ha tutto creato?

« Il cuore ha le sue ragioni, che la logica non riconosce » ha detto Pascal, e forse egli arriva così all'intuizione dell'Essere infinito. Ma il matematico la pensa differentemente. Egli non sta pago che alla ragione più severa. Ora, per lui, lo spettacolo dell'Universo non saprebbe fornire l'idea dell'infinito.

L'immensità dell'Universo è una concezione affatto moderna e anche relativamente recente. Gli antichi professavano su ciò idee assai differenti dalle nostre. Secondo essi, l'Universo era una sfera di assai piccole dimensioni, girante intorno alla terra, supposta fissa. Gli astri dovevano essere molto vicini a noi per potere partecipare a questo comune movimento di rotazione. Questa era l'opinione dominante in Grecia, al tempo in cui le arti e le matematiche vi brillavano della luce più viva. Ad eccezione di Pitagora e dei suoi discepoli (ma essi tenevano tuttavia segrete le loro dottrine per non contraddire i contemporanei), i geometri più celebri condividevano questo pregiudizio, che il grande Aristotele non sconfessava. Essi quindi non

attingevano nella contemplazione della natura la nozione dell'infinito. Eppure essi la possedevano già e anche molto chiaramente, poichè applicavano alla soluzione di problemi geometrici certi metodi ingegnosi, che si fondavano direttamente sopra di essa. Il processo di combustione di Archimede e la teoria delle sezioni Coniche di Apollonio implicavano una nozione dell'infinito non meno esplicita e non meno chiara di quella di Leibnitz o di Fermat.

Lo sviluppo intellettuale del fanciullo, così simile, nelle sue fasi successive, a quello dell'umanità, giustifica la stessa conclusione. Al momento in cui gli si insegnano i primi elementi di geometria, egli ignora ancora completamente le maraviglie dell'astronomia. Egli non immagina nemmeno le immense distanze a cui giungono le investigazioni degli scienziati moderni, e appena sa, che il nostro piccolo globo non è il centro del mondo. Comunque sia non s'è proposta mai la questione della possibile infinità dell'Universo. Tuttavia prosegue lo studio dei teoremi di Euclide, e giunge alla teoria delle parallele. Egli non si maraviglia di sentire che queste linee rette non s'incontreranno mai o (per convenzione) che esse non s'incontreranno che all'infinito.

Dopo qualche giorno ammetterà senza difficoltà che il cerchio è il limite di un poligono, il cui numero di lati diviene infinito, e ne dedurrà un mezzo sicuro per valutare la sua superficie e la sua periferia. Come queste idee, questi ragionamenti trovano accesso nel suo spirito? Come non ne rimane perturbato? Perchè non richiede spiegazioni precise su questo maestoso concetto dell'infinito, che sembra tirarlo così bruscamente fuori della pratica? Non è necessario che il terreno sia già preparato e che molto prima dell'insegnamento della astronomia, egualmente prima di quello della geometria, la nozione dell'infinito esista nella mente del giovane scolaro?

Ai nostri giorni, è vero, l'Universo ha perduto la figura ristretta, che aveva una volta. Armati di telescopi, noi abbiamo scrutato le profondità del firmamento. Noi sappiamo che il nostro globo è un punto nel sistema solare, e il sistema solare tutto intero un punto nell'immensa costellazione della Via lattea. Noi sappiamo, grazie al genio di Newton, che gli astri si muovono per la gravità universale e che le stelle sono abbastanza distanti dal sole, da non far su di esso sentire

la loro influenza. Abbiamo imparato, con le scoperte della fisica, che la luce percorre trecento mila chilometri in un minuto secondo, e che essa per recarsi da un' estremità all'altra della Via lattea, non impiegherebbe meno di trentamila anni. Tutto ciò è atto ad allargare singolarmente la nostra concezione dell'Universo. Ma da queste dimensioni colossali, possiamo noi giungere all'infinito? L'induzione è logica? Non c'è sempre un abisso?

La nostra ragione sorpassa l'abisso per ciò che riguarda lo spazio. Essa lo proclama infinito, perchè non saprebbe concepirlo altrimenti: non gli assegna limiti; non immagina ciò che possa esservi di là di quei limiti, che non sia ancora spazio. Quegli stessi finanche che contestano il suo carattere obiettivo non ardiscono negare l'infinità che noi gli attribuiamo invincibilmente. *Lo spazio è infinito, o non è*. Ma è così dell' Universo? io intendo dire il mondo della materia, l'innumerevole moltitudine degli astri che ci circondano. Possiamo affermare di questo Universo che l'infinità è condizione della sua esistenza? Non oseremmo. Non solo la nostra ragione è muta, non solo essa non afferma

niente; ma, in fatti, nessun indizio permette di concludere nel senso della sua infinità. Le apparenze sarebbero piuttosto contrarie. Non autorizzano, io lo devo riconoscere, nessun giudizio formale; ma per il fatto solo che lasciano l'animo incerto, l'impressione provata dalla vista dell'Universo non potrebbe essere l'origine dell'idea dell'infinito.

Lo studio incompleto delle matematiche produce spesso degli abbagli. Si attribuisce loro volentieri un valore che non hanno. Le matematiche non hanno inventato la logica, nè gli assiomi che servono loro di base, li hanno trovati nel patrimonio universale dell'umanità. Il loro solo merito è stato di farne uso forse con maggiore perizia e con maggiore felicità delle altre scienze. Esse non hanno creato neppure la nozione dell'infinito, da cui hanno saputo peraltro tanto maravigliosamente trar profitto.

Il principiante che trova per la prima volta il simbolo algebrico dell'infinito è molto colpito dalla stranezza del segno e della pretensione manifestata di volerlo applicare ai calcoli. Egli immagina facilmente di essere in presenza di un'idea nuova, tanto è im-

preveduto l'artifizio a cui lo si indirizza. Ma se riflette, s'accorgerà che le matematiche non gli hanno da questo lato insegnato niente. La nozione dell'infinito esisteva già per lui; le matematiche l'hanno evocata e si sono limitate a darle maggior precisione e chiarezza.

Che significherebbe, in effetto, il simbolo matematico dell'infinito per una mente che fosse priva di questa nozione? Questo simbolo si presenta d'ordinario nell'algebra elementare sotto la forma di una quantità finita che ha per denominatore zero. Ora, quale può essere il senso di una simile formula? È possibile dividere una quantità per zero? Come valersi di un divisore che non esiste? Evidentemente un'operazione simile è infattibile e la conclusione dovrebbe essere, che il problema proposto non ammette una soluzione razionale.

Ma il geometra non si arresta; egli fa la seguente osservazione:

Quanto più il divisore diminuisce, tanto più il quoziente cresce. Se il divisore diventa minore di qualsiasi quantità assegnabile il quoziente diventa superiore di qualsiasi quantità assegnabile. Dunque la frazione col suo carattere specifico significa che nessuna quan-

tità finita risponde alla questione. Quale conseguenza pratica può dedursene? Là è l'abisso da superare. Il geometra lo supera con sicurezza per mezzo della nozione preesistente dell'infinito, di cui s'è impadronito e dispone. Egli voleva, per esempio, sapere a quale distanza una perpendicolare a una retta è incontrata da un'obliqua a questa stessa retta. La distanza gli è indicata da un divisore nullo: ne conclude che le due linee non s'incontrano, o sono parallele. Poichè il parallelismo è la sola configurazione che permetta di dire che il punto d'incontro è situato all'infinito. Egli valutando la lunghezza compresa tra i due fochi di un'ellissi si trova in presenza dello stesso simbolo, ne deduce che la pretesa ellissi possiede un solo foco ed è in realtà una parabola. Egli calcolando il numero dei lati di un poligono trova la stessa frazione: ne deduce che il supposto poligono è una curva; poichè d'essa sola si potrebbe dire che il numero dei lati è infinito.

In queste e in simili questioni la situazione è sempre uguale. A un certo momento il geometra si trova in presenza di un indefinito crescente, sprovvisto in sè di ogni significato e da cui non può cavar niente. Egli non

giunge a un terreno sicuro, non riesce a nessuna conclusione accettabile, se non liberandosi da questo indefinito e varcando l'abisso che lo separa dall'infinito. Giunto a siffatte altezze, riceve nuovi lumi: egli scopre un senso in cose che gli parevano prive di senso. Si trasporta, direi, all'altro capo delle questioni, e abbraccia altri orizzonti. Ma sempre fa uso di mezzi attinti a principi generali, non dovuti alle matematiche.

Due esempi chiariranno meglio il mio pensiero.

Gli astronomi, studiando le traiettorie delle comete, hanno creduto riconoscere che parecchie di esse sono paraboliche, quindi illimitate. Questa cognizione ci mette veramente in presenza dell'infinito e si può dire che ce ne darebbe l'idea? Anzitutto queste curve non sono forse tali, come si suppone. Niente somiglia più a una parabola, che un'ellissi abbastanza prolungata. Le differenze tra le supposte parabole e le ellissi possono essere tanto piccole da essere sfuggite alla indagine degli osservatori. Ciò che ci pare infinito, è forse semplicemente dotato di massime dimensioni. Riconoscendo anche che le traiet-

torie siano paraboliche, che cosa ci dà il diritto di dichiararle illimitate? Unicamente la loro identità con le curve particolari, studiate in geometria sotto il nome di *parabole*.

E queste ultime perchè le immaginiamo infinite? Per rispondere basta ricordare l'origine delle sezioni coniche. I geometri greci le ottenevano tagliando un cono con un piano diversamente inclinato su l'asse. Con un certo grado d'inclinazione del piano i due lati della curva divergevano sempre più, a partire dalla cima, e non si raggiungevano mai. Così erano le parabole e il loro sviluppo senza limiti. Ma ciò appunto suppone uno spazio infinito, in cui il cono si stenda liberamente. La concezione della traiettoria consèguita a questa prima idea; non è possibile senza di essa. Non è dunque che suggerisca l'infinito; invece deriva da esso.

L'altro esempio, notissimo, è quello di un punto materiale che scende senza attrito, sotto la sola azione del peso seguendo la circonferenza di un cerchio, di cui il piano è verticale. Questo corpo in movimento, dopo essere giunto in basso al cerchio, risale dall'altro lato con una velocità decrescente, e si ferma, allorchè ha raggiunto precisamente il livello

onde è partito. Il tempo impiegato in questo doppio percorso, in questa intera oscillazione, è tanto più lungo, quanto più il punto di partenza trovasi vicino alla cima.

Se il mobile fosse partito proprio dalla cima, la durata dell'oscillazione, secondo le formole ordinarie, sarebbe infinita. Ma noi ripeteremo qui: Quale può essere il senso di un'espressione algebrica, che assegna al movimento una durata infinita, o suppone un punto di partenza situato all'estremità della curva? Un mobile, in queste condizioni, senza velocità iniziale, non si moverebbe: resterebbe eternamente fermo. Ecco dunque un caso estremo, che la formola del moto non pare possa comprendere. Se noi riusciamo tuttavia a separarnela, è una specie di ragionamento analogo a quello, che ci ha permesso di passare dalle linee oblique alle linee parallele. La durata aumenta, come aumentava la distanza al punto d'incontro delle oblique. Allora noi abbandoniamo l'indefinito per tener dietro alla combinazione, che risponde al valore infinito della quantità. Questa combinazione non può essere che la quiete, essa sola non è in contradizione con l'infinità della durata.

L'infinito non ci vien dunque svelato nè dalle matematiche, nè dallo spettacolo del mondo esterno. Nè tanto meno è una specie di termine dell'indefinito, un'evoluzione ultima della grandezza. Esso appare strettamente connesso allo spazio e al tempo, di cui è attributo necessario; ed è a proposito di queste due idee, quella dello spazio soprattutto, che la parola « *infinito* » prende un significato preciso. L'infinito del tempo è assai meno chiaro. Noi non riusciamo a rappresentarcelo, se non con l'aiuto di immagini derivate tutte dall'infinito dello spazio. Il fiume che scorre incessantemente, la catena che si svolge, o la linea retta che si sviluppa senza fine, tutti simboli del tempo, ricordano una delle dimensioni dello spazio. È nello spazio che noi collochiamo tutti corpi; e le figure geometriche si estendono come piace alla nostra immaginazione.

L'infinito dello spazio è la vera base delle nostre scienze; esso è la sorgente inesauribile con cui il geometra si alimenta. È in fondo al pensiero del fisico, che lo scorge sempre al di là delle estensioni limitate, che vengono colte dalla sua osservazione. L'infinito del tempo figura pure nelle formole, ma accidentalmente,

assai più come caso particolare e ipotetico, che come realtà formale. Noi non possiamo affermare la perpetuità di nessun fenomeno, di nessun movimento; laddove l'infinità d'un ramo di iperbole o di una parabola non trova alcun dubbio nella nostra mente.

Le altre nozioni dell'infinito non ci forniscono cognizioni scientifiche. La nostra ragione si eleva all'ideale del bello e del bene, essa concepisce la somma sapienza, la suprema intelligenza, il potere sovrano. Ma queste nozioni sono ben lungi dall'avere la precisione dell'infinito concernente lo spazio, e non potrebbero prestarsi, come quest'ultimo, a speculazioni matematiche. Le qualità che noi eleviamo così al limite massimo, non sono suscettibili di misura. Noi non abbiamo il mezzo di misurarne il grado; e in conseguenza esse restano in un campo inaccessibile al geometra. Quanto al fisico, egli non scopre intorno a sè nessun oggetto, che possa essere rivestito dell'attributo dell'infinità. Non solo egli non conosce, ma neppure concepisce la forza infinita, la velocità infinita, la temperatura infinita. Tutt'al più egli ammette la possibilità di una quantità illimitata di materia diffusa nello spazio. Ma questa proba-

bilità non gravita sopra i suoi calcoli e non influisce menomamente sulle sue formole. Egli opera e ragiona sempre sul finito.

Da qualunque punto di vista ci collochiamo, sia che ci restringiamo ad un argomento speciale, sia che vogliamo generalizzare e osservare le diverse forme dell'infinito, l'idea stessa resta per noi un enigma inesplicabile; inceppati nel finito, senza nessuna speranza di uscirne mai, come veniamo noi in possesso d'una nozione così differente?

Ma ciò che è ancora più degno di considerazione è, che questa nozione, la cui essenza sfugge al nostro intendimento, ci serve tuttavia a dare alle matematiche i procedimenti più ingegnosi e sicuri. Ugualmente impotenti, secondo Pascal, a comprendere l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, noi sappiamo adattarli ai nostri fini, e per essi il campo intellettuale si è arricchito della più maravigliosa delle scienze: dell'analisi infinitesimale.

---

## CAPITOLO III.

### Continuità e divisibilità all'infinito.

Lo spazio è continuo e sempre simile a sè stesso. Noi non rileviamo differenze nelle sue parti. Tanto meno poi noi concepiamo che tra due parti di spazio possa esistervi una lacuna, che non sia spazio. A dir vero, lo spazio non ha parti. Solo la nostra mente immagina ciò; ma queste divisioni non hanno niente di reale. Esse vengono in aiuto alla nostra mente angusta, la quale è turbata dalla indeterminazione e che ha bisogno di attenersi a qualche cosa di preciso e di limitato.

La presenza dei corpi nello spazio non altera la nostra percezione razionale della sua continuità. Noi distinguiamo, per dir così, lo spazio a traverso il corpo; e quella parte, occupata da essi accidentalmente, si ricongiunge allo spazio circondante, proprio come se non l'occupassero.

Questa continuità non è della stessa na-

tura di quella, di cui i corpi ci offrono l'immagine. Tra la continuità dello spazio c'è la stessa distanza che tra le figure geometriche e la loro costruzione materiale. Per quanta cura noi ci mettiamo, per quanto precisi e perfezionati siano i nostri strumenti, non ci possiamo lusingare di ottenere delle superficie senza spessezza, delle linee senza larghezza, dei punti senza nessuna dimensione. Ciò nondimeno la nostra ragione con uno sforzo di astrazione, è arrivata a concepire questi oggetti e soprattutto a servirsene. Allo stesso modo i corpi in apparenza i più compatti non ci permettono di affermare la loro continuità assoluta. Noi non sappiamo anticipatamente, come per lo spazio, e indipendentemente da ogni esperienza, che non esistano in essi degli interstizi. Lo sappiamo così poco che la scienza moderna ha dimostrato il contrario.

Essa ha provato, con esperienze evidentissime che ogni corpo, solido o liquido, si lascia comprimere sotto l'azione di una forza sufficientemente energica. D'altra parte la chimica considera gli ultimi elementi dei corpi come irreducibili. Bisogna allora ammettere, per spiegare la diminuzione di volume osservato,

che questi ultimi elementi si avvicinino gli uni agli altri durante la compressione. La materia non offre dunque, da sè stessa, la legge di questa continuità perfetta, ideale, assoluta, che noi abbiamo nello spirito e che ci pare trovisi naturalmente realizzata nello spazio e nel tempo.

Il tempo non è soltanto continuo, come lo spazio. Ma passa o scorre, e questo passaggio o corso ci suggerisce l'idea d'un accrescimento, d'un aumento continuo.

All'idea di aumento i geometri aggiungono immediatamente l'idea contraria, quella di diminuzione, e per esprimere l'uno e l'altro hanno trovato un vocabolo comprensivo: quello di *variazione*. Il tempo dunque ci dà l'idea della variazione continua.

Questo è certamente uno dei concetti più fecondi in matematica. La geometria analitica si basa completamente su di esso; la mirabile invenzione di Descartes implica la variazione continua delle coordinate della curva. Già la trigonometria aveva familiarizzato la mente nostra con seni e coseni crescenti o decrescenti, tra zero e la lunghezza del raggio; così come con tangenti

crescenti o decrescenti, tra zero e l'infinito secondo l'ampiezza dell'angolo corrispondente. La meccanica, dal canto suo, ci mostra dei movimenti, che ora si accelerano, ora si rallentano in modo continuo. Le lunghezze descritte aumentano progressivamente fino alla completa fermata del corpo in movimento e le velocità, sotto l'influenza d'un centro resistente, si estinguono a gradi insensibili.

A dir meglio, non c'è forse una proprietà, geometrica o meccanica, che non si presenti a noi sotto l'aspetto di una grandezza, o che non possa essere raffigurata da una grandezza suscettibile di variare con continuità. L'inclinazione reciproca di due rette, la direzione e la curvatura di una linea nei suoi diversi punti, l'intensità della forza centrifuga, gli spazi descritti da un corpo spinto verso un centro fisso, sono altrettante quantità di cui la crescenza o decrescenza è continua. La variazione si trova legata alla posizione del punto o alla scelta del momento. Le figure geometriche, linee, superficie e volumi, devono la loro continuità allo spazio. I movimenti devono la loro allo spazio e al tempo insieme.

La continuità non poteva non divenire per i matematici l'oggetto d'una generalizzazione analoga a quella della grandezza. Allo stesso modo che essi hanno abbandonato la grandezza geometrica per studiare nell'algebra la grandezza puramente astratta, così essi hanno ammesso che questa variasse con continuità. Supposizione d'altra parte perfettamente logica; poichè la grandezza astratta può essere sempre raffigurata da una grandezza geometrica [1].

Infine la continuità di variazione della quantità algebrica li ha condotti alla continuità delle variazioni delle funzioni. Punto culminante, momento decisivo nel progresso secolare delle scienze matematiche.

Un'equazione, come si sa, è un rapporto tra due quantità, che permette di determinare i valori dell'una per mezzo dei valori dell'altra, e viceversa. Le due quantità legate così in

---

(1) Io non considero le quantità immaginarie, che sono, dopo tutto, delle quantità reali, affette dal simbolo di *immaginarietà*. Questo simbolo agisce come coefficiente costante per dare alle quantità reali un significato speciale. Ma queste quantità reali, fuori del loro simbolo, sono soggette alle stesse leggi delle quantità ordinarie.

una formola algebrica o analitica sono dette *funzione* l'una dell'altra. La superficie d'un cerchio e il suo raggio; lo spazio percorso da un corpo cadente liberamente nel vuoto e la durata della sua caduta; la quantità di acqua vaporizzata in una caldaia e il consumo di carbone, sono quantità funzione l'una dell'altra. Poichè la lunghezza del raggio determina l'area del cerchio, la durata della caduta ne determina l'altezza, e la quantità di carbone bruciato corrisponde alla quantità di acqua ridotta in vapore.

Io parlo solo di funzioni esprimibili algebricamente. Ci può essere, e noi le immaginiamo, una quantità di relazioni naturali, che non possiamo fissare con i nostri mezzi matematici. La loro esistenza non è da mettersi in dubbio, ma per l'indeterminatezza che trovasi nella loro forma, io le lascio fuori di queste considerazioni. Io guardo unicamente le funzioni, che si traducono in equazioni analitiche, suscettibili di essere risolute per rapporto ad una delle quantità. Il valore di questa si trova così fissato per mezzo del valore attribuito all'altra. Io dico: *all'altra,* potrei dire *alle altre;* poichè niente impedisce di stabilire l'equazione tra tre o anche più

quantità. Il volume d'un cono retto è insieme funzione della base e dell'altezza, il cammino percorso da un proiettile è funzione insieme della velocità iniziale, del peso e della resistenza dell'aria. Se io non fo menzione che di due quantità o di due *variabili*, è per semplificare il discorso: ma il ragionamento non muta.

La grande concezione matematica, messa in piena luce da Descartes, è la seguente:

Quando due quantità sono legate da una equazione analitica, esse variano unitamente in maniera continua. In altri termini, se una delle quantità varia con continuità, la funzione, che esprime il valore dell'altra, varia pure con continuità [1].

La verità di questo principio si manifesta con evidenza dalla natura dei calcoli a cui si dedica il geometra. Questi, a traverso le più sapienti combinazioni, riesce finalmente a un piccolo numero di funzioni irreducibili, che sono come i materiali primi, gli elementi necessari delle sue formule più complicate. Egli imita in questo il chimico o piuttosto

(1) Ci sono delle eccezioni, ma io mi attengo qui all'idea generale.

la natura che forma nell'ordine minerale e organico, un'immensa varietà di prodotti per mezzo di alcuni corpi semplici. I corpi semplici del geometra, se posso dire così, le sue operazioni fondamentali, i suoi *algoritmi*, come si dice, formano un quadro meno esteso di quello del chimico. Se ne contano appena una dozzina veramente distinti; e pure se si esaminano da vicino, si è disposti a eliminarne qualcuno, il cui carattere analitico è assai incerto. Questi algoritmi, tutti li conoscono: sono l'addizione, con il suo inverso, la sottrazione; la moltiplicazione, col suo inverso, la divisione; la potenza col suo inverso, la radice; il rapporto esponenziale con il suo inverso, il logaritmo; infine diversi rapporti o funzioni prese dalla geometria; circolari o trigonometriche, ellittiche, ecc., su cui non devo dilungarmi.

Il carattere continuo dell'addizione e della sottrazione, o dell'aumento o diminuzione non ha bisogno di essere dimostrato. La continuità della moltiplicazione è ugualmente evidente; si può sempre scegliere un moltiplicatore tanto piccolo, perchè il prodotto diventi minore di ogni grandezza assegnabile. Si può similmente far variare il divisore così

poco, che il quoziente se ne risenta appena. La stessa osservazione si applica alla funzione esponenziale o logaritmica; si è liberi di far variare il meno che si vuole il valore della funzione, facendo variare pochissimo il valore dell'esponente o del logaritmo. Infine i rapporti definiti dalle linee trigonometriche, ellittiche o altre, possono allo stesso modo variare con continuità. Donde deriva che tutte le combinazioni del geometra, appunto perchè si risolvono in funzioni semplici, individualmente continue, sono continue anche nel loro insieme. Poichè queste combinazioni sono necessariamente formate associando, riunendo, amalgamando le funzioni semplici con procedimenti uguali a quegli stessi, che le funzioni semplici rappresentano. Ora, questi procedimenti non alterano la continuità. Dunque la funzione analitica, nella sua massima generalità, è continua, come è continua la variabile che la determina.

Un'eccezione tuttavia deve notare; il lettore la conosce già. La divisione è suscettibile di giungere a un limite, in cui ogni nozione di continuità si perde: quando il divisore diventa nullo e il quoziente, per conseguenza, prende il valore infinito. A questo

punto preciso la continuità non ha senso. Quale continuità può esistervi tra l'infinito e ciò che lo precede? Molto fortunatamente per il geometra, la concezione diretta dell'infinito viene ancora in suo aiuto e gli indica l'interpretazione particolare da dare al problema e gli fornisce il mezzo di supplire alla nozione di continuità, divenuta d'un tratto senza applicazione. Finita al di qua, finita al di là, la grandezza passa per l'infinito, un solo momento. La linea obliqua diviene parallela e subito, se continuasi a inclinarla, riprende l'obliquità in senso inverso. La tangente trigonometrica diviene infinita, quando l'angolo è esattamente retto; subito dopo, per poco che l'angolo aumenti ancora, esso rientra nell'infinito, ma in senso opposto: il suo valore è negativo.

Il continuo e l'infinito sono dunque due idee che si escludono. Al di là del continuo c'è un momento, in cui il finito ci sfugge; la grandezza cambia stato, se è concesso permettersi questa metafora presa dalla fisica. L'infinito è l'abisso del continuo, ma dall'altro lato dell'abisso, il continuo ricomincia, salvo a rivestire d'ora innanzi la forma negativa, o anche immaginaria.

La conseguenza della continuità o dell'aumento continuo, è la possibilità di suddividere indefinitamente una grandezza, o secondo l'espressione consecrata: la *divisibilità all'infinito*. Come, in fatti, concepire un termine alla suddivisione di una grandezza continua? Come immaginare, in una quantità sempre simile a sè stessa, che si possa giungere a una parte che non sia suscettibile d'essere a sua volta divisa in altre parti? Io parlo, ciò s'intende, della divisibilità teorica e non della divisione pratica, limitata necessariamente per la debolezza dei nostri organi e per la imperfezione dei nostri strumenti. La divisione all'infinito è una percezione della ragione, analoga a quella che discerne le figure geometriche. Essa si riferisce solamente alle quantità dotate della continuità perfetta, come lo spazio e il tempo, o alle quantità rivestite da noi di questa proprietà, come le quantità astratte dell'algebra. Intesa così, la divisibilità all'infinito può accrescere il numero degli assiomi, con cui s'apre la geometria di Euclide. Il dire di una retta che essa è continua, o divisibile indefinitamente, o che essa è unica tra due punti dati, è enunziare delle verità dello stesso ordine. Forse l'insegna-

mento matematico guadagnerebbe a non separarle, invece di rimandarne una di esse, come se fosse meno evidente.

Pascal, nelle sue memorabili *Réflexions sur la Géometrie en général* [1], ha consecrato alla divisione indefinita dello spazio le seguenti considerazioni, rimaste classiche:

« Infine uno spazio, per quanto piccolo sia, non può essere diviso in due e queste metà ancora? E come potrebbero queste metà essere indivisibili, senza nessuna estensione, se riunite insieme, formavano la prima estensione?

« Non c'è nell'uomo cognizione naturale, che preceda queste e che le superi in chiarezza. Nondimeno, affinchè vi sia di tutto un esempio, si trovano degli ingegni eccellenti in ogni altra cosa, che davanti l'idea di infinità rimangono perplessi, e non possono in nessuna guisa consentirvi.

« Io non ho mai conosciuto nessuno, che abbia pensato che uno spazio non possa essere aumentato. Ma ho trovato alcuni, nel resto perspicacissimi, i quali hanno assicurato

---

(1) *Pensées* di BLAISE PASCAL, articolo II.

che uno spazio poteva essere diviso in due parti indivisibili, per quanto la cosa sembri assurda.

« Io mi sono ingegnato di ricercare, quale potesse essere in essi la causa di questa oscurità, e ho trovato che non ce n'è che una principale, cioè che essi non sanno concepire il continuo divisibile all'infinito: donde concludono che dunque non è divisibile. È difetto naturale dell'uomo il credere di possedere la verità direttamente, e di là nasce che egli è sempre disposto a negare tutto ciò, che gli è incomprensibile; mentre al contrario egli non conosce naturalmente che l'errore, e non deve ritenere per vere se non le cose, il cui contrario gli appare falso.

« Ecco perchè tutte le volte che una proposizione è incomprensibile, bisogna sospenderne il giudizio, e non negarla per questo, ma esaminarne il contrario; e se lo si trova manifestamente falso, si può con sicurezza affermarla, per quanto appaia incomprensibile. Applichiamo questa regola al nostro argomento.

« Non esiste geometra, che non creda lo spazio divisibile all'infinito. Non si può esser tale senza questo principio, più di quello che

esser uomo senza anima. E nondimeno, non ce n'è alcuno, che comprenda una divisione infinita; e non si è certi di questa verità se non per questa sola ragione, certamente sufficiente, che si comprende perfettamente esser falso che, dividendo uno spazio, si possa giungere a una parte indivisibile, che non abbia cioè nessuna estensione. Di fatto che c'è di più assurdo di supporre che, dividendo sempre uno spazio, si giunga infine a una divisione tale, che divisa in due, ciascuna delle metà resti indivisibile e senza nessuna estensione?..

« Coloro che non saranno sodisfatti di queste ragioni, e restano nella convinzione, che lo spazio non è divisibile all' infinito, non possono concludere niente dalle dimostrazioni geometriche; e possono essere intelligenti in molte altre cose, ma assai poco in queste; poichè si può essere facilmente un uomo capacissimo e un cattivo geometra ».

Ci possiamo maravigliare che un' idea così semplice sia stata oggetto di controversie, non solamente ai tempi di Pascal, ma anche dopo di lui. Tuttora si trovano persone le quali indicano come un'*antinomia* della ra-

gione l'impossibilità di concepire, sia la divisione all'infinito, sia la divisione limitata. Ciascuna di queste affermazioni suscita, essi dicono, una protesta inevitabile, di maniera che la mente resta sospesa.

Il segreto di questa pretesa antinomia mi pare risieda soprattutto in una confusione di idee. Non si fa una distinzione precisa tra le quantità continue, che riguardano le matematiche pure, e le quantità dell'ordine fisico. Per le prime non c'è da esitare, niente potrebbe oscurare le evidenti riflessioni di Pascal; la divisione all'infinito è non soltanto comprensibile, ma necessaria. Per le quantità d'ordine fisico la questione è tutt'altra. La materia non è continua; la suddivisione indefinita non potrebbe intendersi, se non delle loro ultime molecole, quelle che il chimico dichiara irreducibili, e indivisibili per conseguenza. Queste molecole sono esse in effetto irreducibili e nessuna forza fisica o chimica può produrne la separazione? Nessuno lo sa positivamente. In mancanza di prova diretta, i chimici citano in appoggio della loro opinione due prove considerevoli.

La prima è la pluralità degli elementi che conservano le loro proprietà specifiche a tra-

verso tutti i trattamenti, che si fanno loro subire. Che questi elementi siano particelle di materia realmente distinte, veri *corpi semplici*, o che provengano da gruppi fissi di uno stesso elemento primordiale, noi ci troviamo sempre in presenza di elementi, che sembrano avere la loro individualità, poichè questa sopravvive alle trasformazioni che l'hanno momentaneamente velata. Un elemento o un atomo — il nome importa poco — di ferro, di argento, di carbone, di ossigeno, assorbito nelle combinazioni più varie, potrà sempre, si sa, essere ritrovato con i suoi caratteri distintivi ed esercitare di nuovo la sua funzione.

Le maggiori forze della natura sembrano impotenti ad alterare questi caratteri, o a distruggere questi raggruppamenti. Giacchè l'analisi spettrale ci rivela la presenza degli stessi elementi in alcuni astri lontani, dove le condizioni di temperatura e di pressione sono per altro tanto differenti da quelle dei nostri laboratori. Dinanzi a questa tenacità assoluta, ci è difficile l'ammettere che la materia non si fermi a un certo grado nella scala della decrescenza e che i caratteri distintivi, in cui essa si mostra non si leghino a qualche cosa di immutabile. Una suddivi-

sione indefinita, come quella della grandezza geometrica, che accenni a svanire, mal si concilia nel nostro spirito, con la conservazione integrale delle proprietà originali e con la possibilità di rimetterle in evidenza ad ogni momento.

La seconda prova, al quale il nostro grande chimico Regnault dava una massima importanza, è quella della combinazione dei corpi in proporzioni definite. « Questo fatto, egli dice, che è stato perfettamente dimostrato dall'esperienza, è la prova principale che noi invochiamo per stabilire la divisione limitata della materia, e l'esistenza delle molecole indivisibili. L'esperienza dimostra pure che i rapporti più semplici sono quelli, che si presentano più frequentemente; così, si incontrano ordinariamente nei corpi composti i rapporti di 1 a 2, di 1 a 3, di 1 a 4, di 1 a 5, o i rapporti di 2 a 3, di 2 a 5, di 2 a 7 [1] ». Dopo Regnault, la chimica ha ottenuto delle combinazioni in cui i numeri sono lungi dall'essere così semplici. Ma i rapporti rimangono commensurabili e l'argomento conserva il suo valore. Come conce-

(1) *Cours de Chimie*, 2. edizione, p. 6.

pire la stabilità nelle combinazioni, se le quantità in azione non comprendono dei numeri precisi di elementi irreducibili?

Alcuni filosofi antichi, quantunque privi di esperienze scientifiche, erano giunti, con considerazioni *a priori*, alla stessa conclusione. Secondo Democrito e più tardi Epicuro, « la natura è occupata da atomi che differiscono fra di loro per forma, ordine e posizione, e le cui diverse combinazioni esplicano tutti gli esseri ». Non si può non ammirare una perspicacia spinta così fino alla divinazione. Poichè la chimica moderna non soltanto è giunta a riconoscere gli atomi presentiti da Democrito, ma si chiede pure se l'unità della materia, che sembra implicita nelle idee del filosofo greco, non sia una realtà. La pluralità dei corpi non si rannoderebbe a una pluralità di « combinazioni » o di raggruppamenti?

Riassumendo, la divisibilità limitata della materia non ripugna alla ragione; pare anche molto probabile, sia che esistano parecchie specie di materia, sia che vi esista una sola. Al contrario, la divisibilità all'infinito delle grandezze matematiche, dello spazio e del tempo, è certa e necessaria insieme. Non

che la ragione si rifiuti ad ammettere sia l'una, che l'altra affermazione, sotto pretesto di una contradizione inesplicabile, essa le ammette tutte e due insieme, le ammette senza difficoltà, perchè riguardano oggetti di natura differente. Essa non ha da temere nessuna antinomia; poichè queste due affermazioni, costituendosi negli ordini di idee parallele, non rischiano d'incontrarsi, tenendosi mutualmente in distanza.

## CAPITOLO IV.

### Infinitamente piccoli.

La divisione all'infinito ci mette in presenza di quantità sempre più ridotte, tendenti a zero, dicono i geometri, e di cui il grado di piccolezza sfugge ad ogni determinazione. Poichè, con nuove divisioni, questo grado, per quanto piccolo possa esser supposto, potrà sempre essere raggiunto e superato.

Supponiamo, per meglio chiarire il pensiero, che il procedimento sia applicato a una lunghezza determinata, a una porzione finita di linea retta. Questa porzione è prima divisa in due metà; ognuna di queste metà in due altre, e così di seguito indefinitamente. Le lunghezze rispettive delle parti, a ogni grado della scala, saranno rappresentate dalle frazioni; un mezzo, un quarto, un ottavo, un sedicesimo, ecc. Nessun termine potrà essere assegnato a questa serie discendente, poichè la lunghezza corrispondente a questo termine

potrà ancora essere divisa in due metà, che prolungheranno il termine. La geometria e l'aritmetica affermano così all'unisono la divisione all'infinito; l'una su una lunghezza, l'altra sulla quantità astratta, il numero.

Nello stesso tempo che ciascuna parte della linea trovasi espressa da una frazione sempre più piccola, il numero di queste parti diviene sempre più grande. Esso è rappresentato successivamente dalle cifre due, quattro, otto, sedici, ecc., senza che si possa ulteriormente assegnare un termine a questa progressione ascendente. Noi siamo, dice Pascal, collocati tra i due estremi della grandezza, il nulla e l'infinito.

Questi estremi non possono essere raggiunti, in questa operazione, nè l'uno nè l'altro. Accumuleremo invano divisioni su divisioni, il numero delle parti non sarà mai infinito. Avremo un bel dividere di nuovo ciascuna parte, non ridurremo mai la sua dimensione a zero. Le parti più ridotte ritengono sempre una traccia della grandezza, poichè riunite tra loro, sommate capo per capo, esse devono ricostituire la lunghezza data. Ora semplici zeri accumulati nel maggior numero possibile, che si voglia, non ricostituiranno mai una quantità finita.

La proprietà delle grandezze tendenti a zero è dunque di poter allo stesso tempo discendere al disotto di ogni valore assegnato, per quanto minimo si supponga, e quindi di non potere divenire precisamente nulle. Esse rasentano il nulla e non ci cadono. In questo, esse differiscono dalle quantità ottenute per sottrazione o per differenza, le quali diminuiscono, a misura che la somma detratta è uguale alla quantità data. Ecco, per esempio, un corpo, la cui velocità è gradatamente rallentata dalla resistenza del mezzo circostante. Ad ogni momento la velocità conservata è la differenza tra la velocità iniziale e quella che hanno distrutta gli ostacoli. Essa diventa sempre minore e il corpo finisce per fermarsi, quando la velocità consumata è precisamente uguale alla velocità primitiva. Se il corpo percorre una circonferenza, l'arco, che gli rimane a descrivere per ritornare al punto di partenza, diminuisce sempre più e a un certo momento scompare, perchè è la differenza tra la circonferenza intera e l'arco già percorso. Queste quantità decrescenti non hanno nessun rapporto con quelle che risultano dalla divisione ripetuta, o *parti aliquote*, sempre in grado di ricostituire la grandezza

primitiva. Queste ultime sole interessano il geometra; esse hanno ricevuto il nome d'*infinitamente piccoli.*

Questa denominazione, di cui il senso preciso è: *indefinitamente decrescente,* ha per scopo di ricordare che la quantità non esaurisce mai la sua facoltà di decrescenza, ma che dopo essere a lungo diminuita, può diminuire ancora senza giungere tuttavia al limite ultimo, che è lo zero. Le quantità sono indefinitamente piccole, ma esistono sempre. Sono una riduzione delle quantità, donde procedono. Esse ne offrono un'immagine sempre più attenuata, come quella che otterremmo guardando a traverso specchi, che allontanassero sempre più gli oggetti.

Ogni grandezza continua ha il suo infinitamente piccolo corrispondente. La linea retta ha il suo infinitamente piccolo rettilineo. La linea curva ha il suo infinitamente piccolo curvilineo. La superficie ha il suo infinitamente piccolo superficiale, piano o curvo, secondo i casi. La forza, la velocità, la durata hanno i loro infinitamente piccoli rispettivi, che sono una forza, una velocità, una durata infinitamente piccola. Ogni infinitamente pic-

colo è della natura della sua quantità generatrice, e non potrebbe essere altrimenti. Poichè l'infinitamente piccolo, non bisogna mai dimenticarlo, ripetuto un certo numero di volte deve riprodurre la quantità generatrice. Si comporta a questo riguardo come la frazione ordinaria, da cui differisce solamente per dimensione, la quale ha finito di essere percettibile, del pari che concepibile; poichè il divisore eccede qui i numeri suscettibili d'essere formulati.

Sarebbe avere un' idea strana degli infinitamente piccoli, l' immaginare che a forza di diminuirli si rendano identici gli uni agli altri, e che a un dato punto non si distinguano più tra di loro. Essi portano, al contrario, l' impronta indelebile della loro origine. Un infinitamente piccolo di linea non può confondersi con un infinitamente piccolo di superficie. Un infinitamente piccolo di forza non può confondersi con un infinitamente piccolo di durata. Il solo caso da prevedere, è che certi infinitamente piccoli, affini di origine, come sono tutti gli infinitamente piccoli lineari, giungano, non dirò mai a confondersi assolutamente — non sarebbe mai possibile — ma ad approssimarsi così gli uni agli

altri, da rendere la differenza tra essi, in rapporto a sè stessi, infinitamente piccola. Un infinitamente piccolo rettilineo e un infinitamente piccolo curvilineo, per esempio, possono differire tra essi di una quantità non solamente infinitamente piccola in sè — essa lo è sempre — ma di una quantità infinitamente piccola in rapporto a sè stessi, o doppiamente infinitamente piccola. Due infinitamente piccoli di superficie, l'uno piano, l'altro curvo possono differire in simili condizioni. Così può accadere di due infinitamente piccoli, l'uno di forza costante, l'altro di forza variabile.

Questo ravvicinamento, questa intimità non è possibile per gli infinitamente piccoli, tra cui la natura delle cose ha posto un ostacolo permanente, una linea divisoria che niente potrebbe attenuare. Un infinitamente piccolo di linea e un infinitamente piccolo di volume, un infinitamente piccolo di forza e un infinitamente piccolo di durata non sono tra loro paragonabili. Essi non hanno differenza grande o piccola; appartengono ad ordini di idee distinte. Gli infinitamente piccoli suscettibili d'esser riavvicinati, devono, innanzi tutto, essere *omogenei*, intendo dire con ciò, che devono far parte di una stessa famiglia e posse-

dere in comune certi caratteri essenziali. La
linea curva e la linea retta, benchè di ori-
gine differenti, hanno comune la loro dimen-
sione unica, ciò che permette di classificarla
nella stessa categoria e rende possibile il
ravvicinamento dei loro infinitamente piccoli.
Non è necessario d'esser geometra per com-
prenderlo, basta il buon senso. Nessuno esita
a dire che la circonferenza d'un cerchio è com-
presa tra il perimetro del poligono inscritto
e il perimetro del poligono circoscritto; e nes-
suno direbbe che la superficie della sfera è
compresa tra questi due poligoni. Nessuno
oserebbe sostenere che un infinitamente pic-
colo di volume e un infinitamente piccolo
di forza tendano a confondersi, quantunque
tanto l'uno che l'altro convergano insieme
verso zero.

Le quantità finite sono classificate dagli
algebristi secondo il numero delle loro di-
mensioni o secondo il grado con cui figurano
nelle equazioni. Le linee, le superficie, i vo-
lumi sono rispettivamente del primo, del se-
condo, del terzo grado. I gradi superiori al
terzo non hanno un significato speciale, per
lo meno nella geometria ordinaria, che ri-

conosce solamente tre dimensioni. Essi indicano operazioni numeriche o algebriche da eseguire, vale a dire potenze.

Bisogna altresì svincolarsi completamente dalla preoccupazione geometrica, che pesa sui tre primi gradi, in ragione dell'origine storica della classificazione. Si deve vedere esclusivamente nelle quantità risultati di comparazione o numeri (commensurabili o non), in altri termini, grandezze astratte dotate di continuità e suscettibili di essere divise all'infinito. Esse sono allora classificate, prescindendo dal significato concreto, secondo il loro grado o secondo l'indice della potenza, a cui devono essere innalzate. Così una quantità segnata col terzo grado rappresenta non un cubo geometrico, ma un numero moltiplicato due volte di seguito per sè stesso.

Gli infinitamente piccoli sono considerati sotto lo stesso punto di vista, si classificano secondo il grado e la potenza. Tuttavia, per distinguere questa classificazione da quella delle quantità finite, si è convenuto di sostituire la parola *ordine* alla parola *grado*, rimanendo preciso lo stesso significato. Gli infinitamente piccoli del primo, del secondo e del terzo ordine corrispondevano originariamente, co-

me le quantità finite, alle linee, alle superficie e ai volumi. Essi oggi non hanno altro, che un significato algebrico e rappresentano soltanto potenze.

Ogni numero superiore all'unità dà un prodotto maggiore di sè stesso, se lo si eleva al quadrato; e maggiore ancora, se lo si eleva al cubo, e ancora maggiore, se lo si eleva alla quarta potenza. E se questo numero primitivo, invece di essere semplicemente superiore all'unità, è infinitamente grande, il suo quadrato sarà infinitamente grande in rapporto ad esso, e il suo cubo infinitamente grande in rapporto al quadrato; e via di seguito. E così in senso inverso, se il numero primitivo è inferiore all'unità, il suo quadrato sarà minore di esso, e il suo cubo minore del suo quadrato. E se, invece di essere semplicemente inferiore all'unità, esso è infinitamente piccolo, il suo quadrato sarà infinitamente piccolo in rapporto ad esso, il suo cubo infinitamente piccolo in rapporto al suo quadrato, e così di seguito. Il grado di piccolezza degli infinitamente piccoli si misura dunque dall'ordine in cui vengono classificati. In generale un infinitamente piccolo di un certo ordine

è infinitamente grande in rapporto agli infinitamente piccoli di un ordine superiore, e infinitamente piccolo in rapporto a quelli di un ordine inferiore. Gli infinitamente piccoli dello stesso ordine sono tra di loro in rapporti finiti; mentre gli infinitamente piccoli di ordini ineguali sono tra di loro in rapporti ora infinitamente grandi, ora infinitamente piccoli. Si può dire che la grandezza di un infinitamente piccolo è in ragione inversa del suo ordine o del grado della sua potenza algebrica.

Bisogna abituarsi a trattare gl'infinitamente piccoli con la stessa facilità e senza maggiore esitazione delle quantità finite, da cui in fondo non differiscono, se non per la grandezza. Solamente, appunto perchè sono infinitamente piccoli, manifestano a volte tra loro relazioni, che non sussistono tra le quantità finite, e che si ritrovano, ma in ragione inversa, quando le quantità sono infinitamente grandi. Tracciamo, per esempio, un cerchio e all'estremità d'un raggio qualunque tiriamo una tangente, che sarà perpendicolare a questo raggio. Poi, dal centro, tiriamo una obliqua sulla tangente. Queste

tre linee, il raggio, la tangente e l'obliqua, formeranno un triangolo rettangolo, di cui l'ipotenusa sarà segata ad un certo punto, dalla circonferenza. Fino a che la figura conserverà dimensioni finite, cioè a dire finchè l'obliqua non sarà nè parallela, nè perpendicolare alla tangente, tutte le parti conserveranno tra loro rapporti finiti. Particolarmente la porzione dell'ipotenusa, compresa tra la tangente e la circonferenza, e la retta o corda che riunisce gli estremi dell'arco rinchiuso nel triangolo, saranno in un rapporto finito. Ma, se l'obliqua tende a diventare parallela alla tangente, la porzione dell'ipotenusa diventerà infinitamente grande in rapporto alla corda (che non può in nessun caso superare la corda di un arco di novanta gradi). Se al contrario l'obliqua si avvicina al raggio, la porzione dell'ipotenusa diverrà infinitamente piccola in rapporto alla corda, divenuta anch'essa infinitamente piccola. Questa porzione dell'ipotenusa sarà dunque un infinitamente piccolo del secondo ordine, mentre la corda è del primo ordine. Si potrebbero moltiplicare gli esempi e noi vedremmo costantemente prodursi lo stesso fenomeno, non solamente nelle figure geome-

triche, ma in ogni specie di problemi, meccanici, o altri.

Le quantità in cammino verso il nulla non vi tendono tutte di pari passo. Le une ritardano, le altre accelerano; parecchie hanno fatto già un tale cammino, che spariscono dinanzi a quelle che le seguono. L'ordine di grandezza è determinato dalla natura delle relazioni, che esistono tra i diversi elementi della figura o del fenomeno. Questo ordine non dipende dal geometra; egli non fa che accertarlo e si limita a registrarlo.

Pascal, che avrebbe certamente inventato il calcolo infinitesimale, se la religione non lo avesse così presto rapito alle matematiche, presagiva le difficoltà che gli infinitamente piccoli dei diversi ordini potevano incontrare in taluni scienziati: « Infine, egli diceva, s'essi trovano strano che un piccolo spazio abbia tante parti come uno grande, che essi si convincano altresì, che le parti sono minori mano mano che si procede avanti e contemplino il firmamento a traverso una piccola lente, per familiarizzarsi con questa verità, nel vedere ciascuna parte del cielo e ciascuna parte della lente.

« Ma se essi non possono comprendere

che parti, tanto piccole da esserci impercettibili, possono essere divise come il firmamento, non c'è miglior rimedio che il fargliele osservare con lenti d' ingrandimento, che accrescono il punto delicato, fino a che raggiunga una mole prodigiosa; in questo modo capiranno facilmente che, con l' aiuto di un' altra lente, con più precisione lavorata, si potrebbero ingrandire le parti, fino ad uguagliare questo firmamento, di cui essi ammirano la estensione. E così questi oggetti, sembrando loro assai facilmente divisibili, si ricordino che la natura può infinitamente più dell' arte.

« Poichè infine, chi ha loro assicurato, se queste lenti abbiano cambiato la grandezza naturale di quelli oggetti, o se abbiano, al contrario, ristabilito la vera, che la configurazione del nostro occhio aveva mutata e accorciata, come fanno le lenti che impicciolìscono? È ridicolo, dice egli terminando, doversi fermare a queste inezie; ma è lecito talvolta baloccarsi ».

Pare quasi incredibile che la concezione degli infinitamente piccoli abbia sollevato tante obiezioni. Si è voluto vedere in essa un non so che di insolito e di misterioso. Essa andava, così pareva, contro la vera geometria,

mentre in realtà si produceva nel senso del suo sviluppo naturale. In che gli infinitamente piccoli sono più oscuri e meno razionali degli altri oggetti da essa studiati? Da qual lato li superano in difficoltà? È forse più malagevole il concepire un infinitamente piccolo, che il concepire una superficie, una linea, un punto?

La considerazione di questi ultimi oggetti o l'astrazione operata dalla geometria elementare implica la soppressione radicale di una, o più dimensioni. È questo, in verità, uno sforzo considerevole chiesto alla ragione. La concezione dell'infinitamente piccolo non esige niente di simile. Essa lascia le cose come sono. Si parla di volume? ne rispetta le tre dimensioni. Si limita a ridurle all'estremo limite, ma non le sopprime. Si considera una superficie? Essa non accresce la astrazione già fatta; l'accetta e conserva le due dimensioni proposte. Infine, si tratta di una linea? Essa non muta niente alla sua costituzione ideale; ne fa semplicemente decrescere la lunghezza.

La sola novità di cui essa appaia responsabile, è la variabilità. Ai volumi, alle superficie, alle linee, di dimensioni determinate,

sostituisce grandezze indeterminate, la cui proprietà è di sottrarsi a ogni limite. Ma se si vuole riflettere meglio, di questa nozione nemmeno essa s'è fatta iniziatrice. L'ha trovata nella geometria degli antichi: già Euclide e i suoi successori avevano considerato alcune quantità variabili. Già essi passavano per gradazioni insensibili dal commensurabile all'incommensurabile. Essi immaginavano poligoni, i cui lati diminuivano indefinitamente di lunghezza. Essi studiavano ellissi, di cui la forma s'avvicinava ora al cerchio, ora alla parabola, secondo la distanza compresa tra i fochi.

La concezione dell'infinitamente piccolo non è dunque nè più oscura, nè più complessa di quella della maggior parte degli oggetti definiti dai primi geometri. Essa è anzi, sotto certi aspetti, più facile a concepirsi. Se lascia qualche volta nella mente una specie di incertezza, ciò deriva unicamente, non c'è dubbio, dal ritardo col quale fa la sua apparizione nell'insegnamento. Se essa fosse presentata unitamente con le altre nozioni fondamentali, sarebbe accolta senza diffidenza: nè sarebbero necessarie lunghe spiegazioni per imprimerle lo stesso carattere di certezza. Ma un rispetto malinteso della tradizione sto-

rica ne fa differire l'esposizione e le assegna un posto molto elevato nella gerarchia matematica. Questa tradizione costringe gli allievi a mantenere tra le idee una separazione profonda, che la logica non giustifica. La gloria di Newton e di Leibnitz non consiste nell'aver creato d'un sol getto una nozione sconosciuta, ma di averle saputo scoprire applicazioni tanto numerose, che nuove, e di avere sostituito un metodo generale e sicuro a procedimenti particolari e incerti. Di più hanno immaginato, Leibnitz specialmente, formule e termini, che hanno di molto facilitato l'uso del nuovo calcolo.

Lagrange, il cui profondo genio si compiaceva delle vie inesplorate, intraprese di ricostituire il calcolo infinitesimale secondo una concezione tutta differente da quella, che aveva guidato Newton e Leibnitz. Quindi, la sua immortale *Théorie des fonctions analytiques* la quale, con la *Mécanique analytique* e il *Calcul des variations*, gli assegnano un posto tanto elevato tra i più grandi geometri. Tuttavia l'idea essenziale della sua nuova teoria pare inspirata da un apprezzamento poco esatto della concezione di Leibnitz. Facendo inter-

venire gli infinitamente piccoli « si ha » dice egli, « il grande inconveniente di considerare le quantità nello stato in cui cessano, per dir così, di essere quantità (1) ». Lagrange ha compreso che gli infinitamente piccoli non hanno un'esistenza reale, che non si incontrano in natura? Niuno potrebbe contestarlo. Tutto ciò che esiste è determinato e per conseguenza finito. Ma, ammesso ciò, non vi sarebbe nemmeno alcun che di variabile; poichè una quantità, appunto perchè essa è, possiede un valore attuale preciso. Solo la nostra ragione concepisce la nozione del variabile, confrontando le grandezze di quantità vicine e considerandole come valori successivi di una medesima quantità. La nozione d'infinitamente piccolo è dello stesso ordine; l'una e l'altra sono creazioni razionali. Lagrange ha tenuto di mira semplicemente l'estrema piccolezza dell'oggetto, che sfugge a qualsiasi investigazione? L'infinitamente piccolo è infatti impercettibile ai sensi, ma non lo è alla ragione, che vede ancora in esso una quantità, nonostante la sua riduzione indefinita, allo stesso

(1) *Théorie des fonctions analytiques*, par. I. - L. Lagrange, 3ª édition, p. 4.

modo come essa vede delle quantità nella linea e nella superficie, nonostante l'assenza di una o di parecchie delle dimensioni, che accompagnano la realtà.

Non si ripeterà mai abbastanza: l'infinitamente o l'*indefinitamente* piccolo non è mai nullo. Sottratto per definizione alla possibilità dell'annientamento, esso conserva sempre i caratteri delle quantità da cui deriva. Un numero sempre più diminuito non cessa di essere un numero. Una frazione, il cui divisore aumenta senza fine, non cessa mai di figurare nella scala della grandezza. « Poichè nei numeri » dice pure Pascal « dal fatto che possono sempre essere aumentati, ne deriva assolutamente che possono sempre essere diminuiti, e ciò è chiaro; poichè se si può moltiplicare un numero fino a centomila, per esempio, si può anche prenderne una centomillesima parte, dividendolo per lo stesso numero per cui si moltiplica; e così ogni termine di aumento diventerà termine di divisione cambiando l'intero in frazione. Di maniera che l'aumento infinito racchiude necessariamente anche la divisione infinita ».

## CAPITOLO V.

### LIMITI.

Che cosa è un limite?

Nel linguaggio ordinario un limite è una linea di confine, che non deve essere oltrepassata. Ma questa linea di confine può essere raggiunta, toccata. Nel linguaggio matematico, un *limite* è un confine che non solamente non deve essere oltrepassato, ma che non può nemmeno essere raggiunto. Si può solamente avvicinarsegli. La distanza può essere ridotta, finchè si voglia, ma non potrà mai assolutamente diventare nulla. Lo zero è il limite degli infinitamente piccoli: essi gli si accostano sempre, ma non lo raggiungono mai.

Il limite matematico risveglia dunque di necessità l'idea di infinitamente piccolo. O piuttosto, l'infinitamente piccolo è indispensabile al limite; esso segna la distanza tra questo e l'oggetto che lo rasenta. Un limite a cui l'oggetto non potesse accostarsi oltre una

certa distanza, non sarebbe un limite matematico. Non lo sarebbe neppure quello, che potesse essere formalmente raggiunto, o con cui l'oggetto variabile potesse confondersi.

Un circolo è il limite dei poligoni inscritti e circoscritti, il cui numero dei lati aumenta indefinitamente. Poichè la differenza tra il poligono inscritto e il poligono circoscritto, e per conseguenza tra ciascuno di essi e il circolo che è compreso tra i due, può essere ridotta al disotto di ogni grandezza data. Ma un cerchio maggiore oppure minore di quello, su cui poggiano i poligoni, non è il loro limite; poichè questi ultimi non possono avvicinarsi al di là di una certa distanza. L'assintoto a un ramo d'iperbole ne è il limite, ma una parallela a questa assintoto non è un limite. Poichè se essa è situata al di qua sarà raggiunta e divisa dall'iperbole; se poi essa è situata al di là, l'iperbole ne resterà separata almeno dalla distanza compresa tra l'assintoto e la parallela.

Per la ragione inversa, il diametro di un cerchio non è il limite delle corde, perchè niente impedisce a queste di passare per il centro e di diventare esattamente diametri. Un raggio non è nemmeno il limite dei

seni trigonometrici, perchè niente impedisce all'angolo di essere retto e per conseguenza al seno di confondersi con il raggio. In questi due esempi, la linea falsamente chiamata *limite* è semplicemente il maggiore degli oggetti considerati, come in altre circostanze esso sarebbe il minore.

Allorchè si riflette sulla definizione del limite, si è colpiti dalla ragione profonda che l'ha raccomandato ai geometri.

La conoscenza di una corda, in un cerchio, non insegna niente di nuovo sul diametro, perchè c'è tra essi identità di natura, di essenza. Si tratta semplicemente di più o di meno; aggiungete una certa lunghezza a una corda, voi avete il diametro; risecate una certa lunghezza dal diametro, avete la corda. Lo studio della corda sarebbe dunque un giro inutile per giungere alla conoscenza de diametro. Accadrebbe anzi, in questo caso particolare, che, essendo il diametro una linea più facile a determinare di una corda qualsiasi, sarebbe più utile esaminare il diametro direttamente, senza occuparsi prima della corda.

È cosa del tutto differente per il poligono e

il cerchio. Questi due oggetti differiscono tra di loro per natura. Il cerchio non è un poligono dai lati più o meno piccoli; il cerchio non ha lati. Per quanto numerosi siano i lati di un poligono, non è mai un cerchio; resta poligono sempre. Per conseguenza il poligono può e deve avere proprietà differenti da quelle del cerchio. Ma d'altra parte il poligono può avvicinarsi continuamente al cerchio e la differenza tra di essi diviene inferiore ad ogni quantità data. Allora la proprietà del poligono, o la relazione che l'esprime, si adatta al cerchio con tanta minore inesattezza, in quanto il poligono è più prossimo a confondersi col cerchio. E se noi sappiamo esprimere la condizione, con cui il ravvicinamento è spinto al di là di ogni termine, l'errore commesso è perciò appunto destinato a divenire inferiore ad ogni grandezza finita, in altri termini, diviene assolutamente nullo.

Questo è il fine dell'analisi infinitesimale. Essa si propone invariabilmente, impiegando il metodo dei limiti, o qualche procedimento analogo, di mettere in presenza due oggetti di natura distinta: l'uno che si può conoscere, e l'altro che non si sa come investigare. Se questi due oggetti sono suscettibili di diven-

tare sempre più prossimi, il problema è risoluto. Così ne vien fuori questo risultato in apparenza paradossale, che la conoscenza di un oggetto serve a procurare la conoscenza di un altro oggetto, appunto perchè la loro natura differisce. Tutto il segreto dell'operazione risiede nella possibilità del loro ravvicinamento indefinito.

Noi tocchiamo qui uno dei punti più controversi dell'analisi matematica. Molti criticano la concezione dei limiti per essere indiretta, artificiale e poco adatta, essi dicono a facilitare la percezione delle verità geometriche. Indiretta, lo è senza dubbio, perchè non è certo via diretta il servirsi di un oggetto estraneo alla questione, per giungere alla determinazione di quello, che ci interessa. Ma come evitarlo? Questo cammino ci è imposto dalla imperfezione della nostra intelligenza, incapace di percepire direttamente le proprietà di tutte le cose. È colpa dei metodi, se noi non afferriamo in un colpo d'occhio la relazione tra la superficie di un cerchio e il suo raggio, come noi afferriamo la relazione tra la superficie d'un rettangolo e i suoi lati? La conformazione del nostro intendimento vuole così.

Non si potrebbero qualificare come artificiali o arbitrari i procedimenti che vengono in aiuto alla nostra debolezza e ci permettono di passare dagli oggetti facilmente intelligibili a quelli che non lo sono. Il metodo dei limiti è dunque semplicemente indiretto. Lo è, come sono indiretti in fisica molti sperimenti, che tendono a mettere in evidenza l'azione di causa, la cui conoscenza diretta ci sfugge.

Ma partire di là per stabilire una linea divisoria tra l'idea dei limiti e quella degli infinitamente piccoli, per rigettare l'una e ammettere l'altra, questo è quello che pare a dirittura illogico. Le due idee, in fatti, sono connesse, correlative; esse si completano e si spiegano reciprocamente. Non c'è limite senza un infinitamente piccolo, che misuri la differenza; non c'è niente d'infinitamente piccolo senza un limite che è zero. Non si può far di meno della nozione di limite, senza cadere in una metafisica incerta, come è accaduto allo stesso sommo inventore del calcolo infinitesimale; o senza ricorrere a sviluppi algebrici, che occultano la percezione dei fenomeni più semplici. Il nostro grande Lagrange, costretto a definire secondo il suo metodo analitico la velocità nel movimento

variato, la fa derivare dalla osservazione di un polinomio: « Dunque, in generale, egli dice, in ogni movimento rettilineo in cui lo spazio percorso è una funzione data dal tempo trascorso, la funzione prima (derivata primitiva) di questa funzione rappresenterà la velocità, e la funzione seconda rappresenterà la forza acceleratrice in un istante qualsiasi... Donde si vede che le funzioni prime e seconde si presentano naturalmente nella meccanica, dove esse hanno un valore e un significato determinato... [1] ». Come se la pratica dello sviluppo delle funzioni in serie fosse necessaria per avere l'idea della forza e della velocità! Come se queste nozioni non fossero nella nostra mente anteriori allo studio dell'algebra! Come se la velocità non ci apparisse naturalmente espressa dal rapporto dello spazio percorso al tempo; e come se, nel movimento variato, questa espressione non ci sembrasse tanto più esatta, in quanto il tempo è più breve e il movimento più vicino alla uniformità!

Indubbiamente l'aiuto dell'algebra è indispensabile per calcolare effettivamente questa

(1) *Théorie des fonctions analytiques*, pag. 321.

velocità. Ma non bisogna confondere la ricerca di un valore numerico con l'idea stessa dell'oggetto, con la sua definizione. Ora la definizione, che il senso comune suggerisce, contiene implicitamente l'affermazione di un limite. Prima di conoscere se noi siamo nella condizione di determinarlo, noi sentiamo che esiste. Noi comprendiamo che si trova nel rapporto dello spazio percorso al tempo impiegato, e che i nostri sforzi oramai dovranno tendere a liberare questo rapporto, riducendo indefinitamente la grandezza della durata.

Io riprodurrò a proposito dei limiti l'osservazione già fatta sugl'infinitamente piccoli.

Ogni limite deve avere, con l'oggetto variabile che vi si avvicina, una certa parità di composizione, non dico una identità, ma una specie d'omogeneità. Una linea non può essere il limite di una superficie, nè di una forza. Le linee hanno per limiti delle linee, le superficie hanno per limiti delle superficie. Forze, durate, o velocità hanno per limiti rispettivi delle forze, delle durate, delle velocità. Tra un limite e la sua variabile, ci deve essere appunto tanta parità, che questa possa avvi-

cinarsi indefinitamente a quello, non tanto però che tutte due possano coincidere. Al di qua il ravvicinamento non è abbastanza intimo; al di là porta la confusione.

A quale segno si riconosce che un tale grado di parità sia stato raggiunto e non superato? Le matematiche, ordinariamente così chiare e precise, non possono far a meno di dare la risposta a questa domanda.

Affinchè due oggetti non giungano mai a confondersi assolutamente, bisogna che ci sia nella definizione di uno d'essi uno, o parecchi elementi incompatibili con la definizione dell'altro. I due oggetti devono essere sostanzialmente, logicamente distinti, e questa distinzione deve persistere: indipendentemente dal loro grado di grandezza o di piccolezza. Una linea retta e una linea curva sono logicamente distinte, poichè la definizione dell'una implica la costanza di direzione, che è precisamente in opposizione con la variabilità di direzione dell'altra. Una parallela a una retta e una obliqua a questa stessa retta non possono confondersi; poichè, per definizione, l'obliqua ha un punto di incontro, mentre la parallela non ne ha, o, ciò che fa lo stesso, l'ha solamente all'infinito. Al contrario, il dia-

metro e la corda di un cerchio possono confondersi, perchè le loro definizioni non sono incompatibili. La corda è definita: la porzione di retta compresa all'interno del cerchio, da essa segato; il diametro non contraddice a questa definizione. Ma se la corda fosse definita: una retta *fuori del centro*, allora l'incompatibilità sorgerebbe e la coincidenza sarebbe impossibile. La prima condizione di un limite matematico è dunque che si trovi nella definizione di questo limite qualche proprietà incompatibile con la definizione della variabile.

Passiamo alla seconda condizione.

La possibilità per un oggetto variabile di avvicinarsi indefinitamente al suo limite deriva dal fatto, che questo oggetto contiene implicitamente o esplicitamente, nella sua definizione, un elemento, che invece di essere fisso, è suscettibile di prendere tutte le gradazioni di grandezza. Il circolo essendo designato come il limite dei poligoni regolari inscritti o circoscritti, questi hanno un elemento variabile, cioè il numero dei lati, o la lunghezza di ciascuno di essi. Se questo elemento fosse fissato anticipatamente, non ci sarebbe più che un sol poligono possibile, invece della

serie di cui si dispone per avvicinarsi sempre più al cerchio. La parallela a una retta, essendo presa come limite delle oblique tracciate dal medesimo punto, c'è un elemento indeterminato: la distanza dal punto d'incontro dell'obliqua con la retta. La variazione di questo elemento permette il numero infinito delle oblique. Il movimento uniforme, essendo considerato come il limite di un movimento variato, rimane un elemento tacitamente indeterminato: la durata in cui questo movimento variato si effettua. Così si può, restringendo sempre più questa durata, ottenere un movimento variato, la cui differenza col movimento uniforme diventi sempre meno sensibile.

In tesi generale, il congegno dei limiti poggia sulla facoltà espressa o sottintesa di far variare l'elemento che esprime la differenza sostanziale tra i due oggetti. Grazie a questa facoltà, si viene in possesso della differenza effettiva; si può ridurla inferiore ad ogni grandezza assegnabile.

Nella geometria, la maggior parte delle proprietà sono rappresentate con lunghezze o superficie suscettibili di aumentare o di diminuire. La curvatura, l'inclinazione, la ve-

locità, l'accelerazione, sono raffigurate da tante rette, le quali, in una stessa categoria di oggetti, variano a volontà. Questa indeterminatezza permette di condurre gradatamente l'oggetto in prossimità del suo limite. Un cerchio, il cui raggio cresce, differisce sempre meno della linea retta che gli è tangente. La sfera, ingrandendosi, tende a confondersi col piano, su cui poggia. L'ellissi di cui la linea focale diminuisce, si avvicina sempre più al cerchio; quella di cui la linea focale aumenta, si avvicina alla parabola.

Secondo la definizione stessa, un oggetto variabile non può accostarsi nello stesso tempo a due limiti. Giacchè, per poco che questi limiti fossero distinti, ci sarebbe tra loro una differenza espressa da una quantità finita. La variabile avvicinandosi ad uno di essi sarebbe nello stesso tempo allontanata dall'altra, di una quantità per lo meno eguale alla differenza supposta. Essa non potrebbe dunque approssimarsi al secondo limite in maniera, da differirne meno di ogni quantità data, come vuole la definizione generale. La dualità stabilita sarebbe una vana apparenza; in realtà i due limiti non costituirebbero che uno e si confonderebbero totalmente.

La proposizione reciproca non è vera. Ogni limite non corrisponde necessariamente a una sola variabile. Parecchi oggetti variabili, in origine distinti, possono tendere verso lo stesso limite, nel quale le loro differenze si risolverebbero, se potessero effettivamente raggiungerlo. Queste differenze, lo sappiamo, sono destinate a sussistere sempre; ma si attenuano sempre più, man mano che ciascuno degli oggetti si avvicina maggiormente al limite comune. Noi abbiamo osservato questo fenomeno negli infinitamente piccoli. Li abbiamo veduti, a dispetto delle loro origini differenti, avviarsi tutti, quantunque a passo disuguale verso il nulla. Lo zero è il loro limite comune; lo è per gli infinitamente piccoli di linea, come per gli infinitamente piccoli di superficie, di volume, di forza.

Nel regno delle quantità finite, una tale generalità non si incontra. Il limite deve, prima di tutto, essere omogeneo alla variabile. Ma, fatta questa riserva, esso può essere il fine comune offerto a un aggregato di variabili distinte. Il cerchio è tanto il limite dei poligoni inscritti, come dei poligoni circoscritti. La specie di questi poligoni non è d'altronde designata; si potrebbe indifferentemente par-

tire dal triangolo e andare sempre raddoppiando; ciò che darebbe l'esagono, il dodecagono ecc.; o partire dal pentagono, che fornirebbe il decagono, i poligoni di venti, di quaranta lati, ecc. Tutte queste serie convergerebbero egualmente verso il cerchio. Si potrebbe anche adottare un circuito poligonale non regolare; basterebbe che i suoi estremi si appoggiassero sulla circonferenza, o che vi si avvicinassero indefinitamente, secondo una legge data.

Uno stesso limite può dunque essere raggiunto per vie molto differenti. Questo punto ha un'importanza massima. In fatti, se la variabile che s'era dapprima escogitata per gettare un po' di luce sulle proprietà del limite, non soddisfà, se essa pare troppo complicata, difficile a trattare, è lecito di rigettarla e sostituirgliene un'altra, che ammetta lo stesso limite, ma rispondente meglio al suo scopo. I poligoni irregolari, per esempio, non permettendo di giungere facilmente alla conoscenza della proprietà del cerchio, si sostituiscono con poligoni regolari, che tendono allo stesso limite, e la cui misura è molto più semplice e rapida. I geometri profittano frequentemente di questa facoltà; è anzi questa

una delle parti importanti del loro compito. Essi devono scegliere, in mezzo a molte variabili possibili, il sistema meglio appropriato, e questa scelta esercita un'influenza decisiva sulla soluzione.

La concezione dei limiti non è speciale alle matematiche. Essa ha trovato in questa scienza la sua più precisa espressione e la sua applicazione più regolare; ma risponde a un bisogno generale e molto elevato della nostra intelligenza. In ogni cosa l'uomo aspira a un ideale più nobile, di quello che può raggiungere. Nel dominio del bello e del bene come in quello del vero, egli tien dietro ardentemente a un ideale, a una perfezione, il cui raggiungimento è interdetto alle sue forze. Egli tenta di avvicinarsegli e, sentendo tuttavia la sua impotenza finale, concepisce la possibilità di una evoluzione, che restringa sempre più la distanza inevitabile. Egli ha, se non la speranza, per lo meno l'intuizione di un progresso indefinito. Anche quando questo progresso sfuma in un punto oscuro e lontano, così che la sua realtà diventa problematica, l'uomo sente ancora che esiste un'idea modello, un limite — per usare il linguaggio dei

matematici — verso cui la cosa contingente e imperfetta è destinata a gravitare. L'uomo posto sul campo geometrico, vi porta il suo bisogno di ideale e di perfezione. Egli vuole figure senza difetto, linee senza larghezza, superficie senza spessezza. Circondato dal discontinuo e dall'eterogeneo, egli cerca il continuo e l'omogeneo. Dietro la linea spezzata, dai lati decrescenti, egli scorge la curva, su cui i cambiamenti di direzione si dileguano. Alla variazione per gradi successivi, egli sostituisce la variazione per gradazioni insensibili. Tutto si fonde, tutto si armonizza nella sua mente, più che nella realtà. Così apparisce la nozione del limite, che idealizza ogni soggetto del pensiero e ogni oggetto della natura, prima di diventare uno strumento di scoperte che non ha pari.

---

## CAPITOLO VI.

### Del metodo infinitesimale.

Quantità variabili, convergenti verso i loro limiti rispettivi, possono avere tra di loro determinate relazioni. Se queste relazioni si mantengono durante tutta la durata della convergenza, o per l'intero valore delle variabili, esse esistono egualmente tra i limiti stessi. Esse si estendono di diritto a questi ultimi, quantunque non si sappia stabilirle direttamente per essi. Così, essendo riconosciuta una relazione tra la superficie di un poligono regolare, il suo perimetro e la perpendicolare abbassata dal centro su uno dei lati, o apotema, questa stessa relazione esisterà tra la superficie del cerchio circoscritto, la sua circonferenza e il suo raggio, che sono i limiti rispettivi verso i quali tendono gli elementi del poligono, a misura che si aumenta il numero dei lati.

Questo principio generale è una conse-

guenza diretta della concezione dei limiti e la sua evidenza non pare si possa infirmare. Come, in effetti, una relazione sussistente tra le variabili, in tutti i loro stati di grandezza, non potrebbe applicarsi ai limiti? In qual momento il dissidio avverrebbe? Quale posto assegnarle in questo spazio indefinitamente ristretto che separa le variabili dai loro limiti?

I geometri precisano meglio la dimostrazione; io la riassumo, nonostante la sua aridità, a cagione della massima importanza del principio.

Se ci fosse una differenza, essi dicono, tra la relazione, che conviene alle variabili e quella che converrebbe ai limiti, questa differenza potrebbe essere concepita come equivalente a una certa quantità, suscettibile o non di essere espressa con cifre, ma in ogni caso finita. Ora, nella relazione spettante alle variabili, sostituiamo ad ognuna di esse il suo limite. Ne risulteranno tante cause di errore, quante sono le variabili e ciascuna causa di errore sarà misurata dalla differenza esistente tra il valore attuale della variabile e il valore fisso del limite. Queste diverse cause d'errore si trovano d'altra parte amplificate e moltiplicate in seguito alle opera-

zioni, in cui erano vincolate le variabili e in cui i limiti sono vincolati a loro volta. Qualunque sia il risultato di questa amplificazione, l'errore finale, dovuto all'introduzione di un limite, potrà essere rappresentato dalla differenza corrispondente, moltiplicato per un numero più o meno grande, commensurabile o non, ma finito. In breve, l'errore proveniente dalla sostituzione di tutti i limiti avrà come espressione una somma di termini uguali ciascuno al prodotto di una certa differenza per una quantità finita. Ma ogni termine può essere reso tenue come si vuole, per un'approssimazione conveniente della variabile e del limite o per una riduzione sufficiente della differenza. Dunque anche la somma può essere ridotta inferiore ad ogni quantità finita, e per conseguenza, inferiore alla differenza che si è supposta esistere tra la relazione conveniente alle variabili e quella che dovrebbe convenire ai limiti. Questa differenza dunque non esiste.

Questo ragionamento per assurdo (adopero l'espressione consecrata) suppone tacitamente che nessuno dei termini generati dalla sostituzione dei limiti alle variabili possa divenire infinito. È il caso usuale. Poichè le funzioni

sono continue, come le variabili da cui dipendono, e ogni accrescimento infinitamente piccolo della variabile fa crescere infinitamente poco la funzione. Quindi, allorchè si sostituisce nella relazione un limite alla sua variabile — ciò che vuol dire modificare infinitamente poco questa — le espressioni in cui figura la variabile devono risentirsene molto debolmente e non potrebbero assumere valori infiniti.

In alcune circostanze peraltro le cose accadono diversamente. Se ci troviamo in presenza, supponiamo, della tangente trigonometrica di un angolo, e se quest'angolo misura quasi novanta gradi, un minimo accrescimento basta a renderlo retto e la tangente diventa infinita. La sostituzione del limite alla sua variabile, o dell'angolo retto all'angolo acuto prossimo, fa nascere così un termine infinito e il ragionamento manca di base. Ma bisogna considerar meglio la cosa.

Il geometra sa interpretare l'apparizione dell'infinito in una equazione; egli non ignora che essa è l'indice d'una disposizione particolare, di cui non s'era preoccupato affrontando il problema. Egli ragionava su delle oblique e si trova in presenza di parallele. Osservava delle ellissi e incontra una para-

bola. Ricercava un movimento più o meno lento e riesce alla quiete, alla negazione di ogni movimento. Niente di sorprendente a ciò, che le relazioni stabilite nell'ipotesi primitiva non convengano a un tipo così differente. Ma il principio stesso non ne è scosso, poichè non c'è più in realtà il limite: l'entrata in scena dell'infinito lo sopprime. L'infinito non potrebbe costituire un limite; il suo nome lo dice. Esso è, di sua natura, vago, indeterminato; mentre ogni limite è essenzialmente fisso e preciso, cioè finito.

Noi ci lasciamo talvolta ingannare da espressioni male appropriate. Per esempio, essendo la parallela il limite delle oblique, noi parliamo della distanza dal punto d'incontro, come se avesse l'infinito per limite. Là è l'errore del linguaggio. Il limite, che può figurare nei calcoli, non è questa distanza; ma la direzione, ossia l'angolo che le oblique formano con una certa base e che tende ad eguagliare l'angolo formato dalla parallela. Similmente nel ravvicinamento della parabola e delle ellissi, il limite non è la lunghezza infinita, che separa i due fochi, ma bensì la direzione della retta, che congiunge il punto della curva al secondo foco, e di cui il pa-

rallelismo con l'asse dell'ellissi si manifesta sempre più. Il termine *limite*, essendo ricondotto al suo vero significato, il principio rimane sempre applicabile.

È facile prevedere il profitto che i geometri hanno dovuto ricavare da una proposizione così generale. In ogni questione in cui le relazioni tra gli elementi reali non sono direttamente manifeste, ci sarà il mezzo di determinare un sistema di variabili aventi come limiti rispettivi questi elementi reali. Se si sanno trovare le relazioni esistenti tra le variabili, saranno nel tempo stesso rintracciate tra i limiti. Poichè basterà introdurre nelle equazioni la condizione del passaggio ai limiti, o affermare che le variabili differiscono infinitamente poco dal valore dei loro limiti.

Così la misura del cerchio o il rapporto tra la superficie, la circonferenza e il raggio è sostituita dalla misura del poligono, vale a dire dalla relazione analoga, molto più facile a precisare, tra la superficie, il perimetro e l'apotema. L'inclinazione, sull'asse delle ascisse, della tangente a una curva è sostituita dalla inclinazione della segante, che girerà insensibilmente intorno al punto di con-

tatto. Gli spazi percorsi da un mobile, sotto l'impulso di una forza continuamente variabile, sono sostituiti dagli spazi percorsi sotto l'impulso di una forza variante a gradi e costante durante ciascuno dei piccoli intervalli. La curvatura di una linea, di qualsiasi forma, è sostituita da quella di un cerchio passante per tre punti della curva, che diventino sempre più prossimi. Se la relazione tra gli elementi sostituiti può essere ottenuta, il problema sarà risoluto.

Ecco l'obietto essenziale del metodo infinitesimale. Esso si propone di sostituire agli elementi reali gli elementi fittizi, suscettibili di avvicinarsi loro indefinitamente, e s'applica a determinare per i secondi le relazioni, che non si sapevano stabilire per i primi. Questa missione gli ha valso il nome di metodo *indiretto*. In fatti, esso non va diritto al fine, come il metodo algebrico ordinario. Esso non opera sugli elementi proposti. Esso devia, opera su un problema che gli è vicino, artificialmente costruito in vista della soluzione. Ma sarebbe difficile immaginare espediente più ingegnoso, e, nel medesimo tempo, più conforme alla tendenza generale del nostro spirito, sviluppata dalle circostanze in mezzo

a cui operiamo. Quante volte non ci siamo veduti nell'impossibilità di superare taluni ostacoli? Allora l'esperienza ci insegna a scegliere un cammino più lungo, ma più ovvio. Il metodo infinitesimale non fa altrimenti. Esso gira intorno alla difficoltà e giunge allo scopo con un giro, di cui ha saputo trovare un procedimento regolare e sistematico.

La messa in opera non è sempre semplice. Spesso anzi essa supera le forze dei più celebri geometri. Sia che si resti nel dominio delle matematiche pure, sia che si indaghino le leggi naturali, può essere assai malagevole: 1.° di trovare un sistema di variabili appropriate, vale a dire aventi per limiti rispettivi le quantità date; 2.° di scoprire le variazioni tra queste variabili, affine di estenderle ai loro limiti!

Io non parlerò di questa seconda parte, per cui non è possibile di formulare nessuna regola. Tutto dipende evidentemente dalla sagacità dello scienziato. La sua attitudine, la sua intuizione, anzi direi la sua inspirazione, lo guidano in questa ricerca vaga. Per la prima parte, al contrario, regole utili sono date dal metodo infinitesimale.

Sul bel principio l'analizzatore sa ch'egli

non è inceppato in un solo sistema di variabili. Parecchie variabili distinte potendo avere lo stesso limite, egli fa una scèlta tra gli elementi fittizi da sostituire agli elementi reali. Può, in una parola, trattare il problema da diversi punti. Perchè egli non travii in questa scelta preliminare, il metodo suggerisce talune restrizioni. Principalmente, nessuna variabile deve essere ammessa, se non risponde alla condizione che tra essa e il suo limite la differenza sia suscettibile di divenire infinitamente piccola. Dovendo essere identica la condizione per tutte le variabili tendenti allo stesso limite, le loro differenze reciproche devono discendere al disotto di ogni grandezza assegnabile. Se dunque i limiti sono degli infinitamente piccoli (come avviene dell'arco di cerchio, verso il quale converge il lato decrescente di un poligono), le variabili suscettibili di esser loro sostituite, dovranno essere anche degli infinitamente piccoli, e degli infinitamente piccoli *dello stesso ordine*. Tale è la condizione indispensabile imposta a ogni quantità, che sostituisca un elemento reale del problema: esso non deve differirne se non di una quantità infinitamente piccola in rapporto a questo elemento stesso.

I geometri sono così condotti a fare una prima scelta tra le quantità che sembrano adatte ad essere impiegate. Per esempio, nel problema già citato della tangente a una curva, l'accrescimento della ascissa, quello dell'ordinata, l'arco di curva corrispondente a questo accrescimento, la corda, la porzione di tangente intercettata tra le due ordinate sono degli infinitamente piccoli del primo ordine; al contrario, la porzione della ordinata compresa tra la tangente e la curva è un infinitamente piccolo del secondo ordine. Questo non può dunque essere impiegato invece d'uno di quelli. Il movimento di un punto materiale su di una curva, sotto l'azione di una forza continua, è spesso scomposto in due: l'uno che si svolge lungo la tangente, in virtù della velocità acquistata e della sola componente tangenziale della forza motrice; l'altro diretto verso il centro di curvatura, sotto l'impulso della sola componente normale alla curva. Lo spazio percorso nel movimento tangenziale è un infinitamente piccolo del primo ordine; mentre lo spazio percorso nel senso della normale è un infinitamente piccolo del secondo ordine. Se dunque questi spazi entrano come limiti in una combina-

zione, le variabili corrispondenti saranno anche di ordini differenti.

La seconda regola, conseguenza della precedente, merita una menzione speciale, poichè non solamente rende grandissimi servigi, ma spande una viva luce sulla precisione dei procedimenti dell'analisi infinitesimale. Essa ha un valore matematico e filosofico insieme.

Questa regola si formula così: « Due quantità variabili finite, di cui la differenza è suscettibile di diventare infinitamente piccola, possono essere ognora sostituite l'una all'altra nei calcoli ».

Queste due variabili hanno necessariamente lo stesso limite. Poichè, se avessero limiti distinti, questi differirebbero tra loro di una quantità finita, superiore per conseguenza alla differenza tra le quantità date, la quale è suscettibile di diventare infinitamente piccola. Queste variabili, aventi dunque lo stesso limite possono essere sostituite l'una all'altra e non può intervenire alcuna modificazione nel risultato finale. Tanto che si operi su una, quanto che si sia operato sull'altra, necessariamente quando si viene ai limiti, si deve riuscire agli stessi valori. Così l'apparente causa di errore, portata a un calcolo dalla sostituzione

di una quantità a un'altra, suscettibile di differirne infinitamente poco, non può farsi sentire sulla determinazione di un limite. Questa causa d'errore è destinata a svanire e svanisce di fatti al momento in cui le quantità variabili sono abbandonate e i limiti soli sono in gioco.

Le equazioni tra le variabili sono equazioni *suppletive* o *di transizione*. Esse sono stabilite momentaneamente e servono come di passaggio alle equazioni tra i limiti. Se io scrivo che « la superficie del poligono regolare inscritto in un cerchio è eguale al perimetro moltiplicato per la metà dell'apotema », io faccio un'equazione *di transizione*. La mia intenzione non è stata di fermarmi lì; io mi sono proposto di giungere a un rapporto finale, in cui la superficie del poligono, il perimetro e l'apotema saranno rispettivamente sostituiti dalla superficie, dalla circonferenza e dal raggio del cerchio. In questa equazione di transizione io posso, senza compromettere il risultato ricercato, sostituire le quantità adoperate con altre, le cui differenze sono suscettibili di diventare infinitamente piccole. Potrò particolarmente sostituirle con la superficie, il perimetro e l'apotema

del poligono circoscritto, o con gli stessi elementi di un poligono regolare di un'altra specie. Tutte queste sostituzioni, non portando che differenze prossime a scomparire, non avranno nessuna influenza sulla soluzione. Esse non impediranno di trovare gli stessi limiti, poichè in nessun momento, sostituzioni fatte in tali condizioni hanno la virtù di cambiare i limiti.

Ciò che è vero di due quantità finite, è egualmente vero di due infinitamente piccoli dello stesso ordine, la cui differenza converge verso un ordine superiore. Questi due infinitamente piccoli hanno lo stesso limite e la loro sostituzione reciproca, non importa in qual momento, non potrebbe modificare il risultato finale.

L'analizzatore ha quindi dinanzi a sè un mezzo efficacissimo di semplificare e accelerare le operazioni. Egli può non solamente da principio, ma nel corso dei calcoli, sostituire le quantità variabili scelte da prima con altre, che ne differiscono poco in rapporto a sè stesse. Può anche sopprimere puramente e semplicemente, in una equazione, tutti gli infinitamente piccoli di un ordine superiore a quelli, di cui fa uso per la determinazione

dei limiti. Egli non deve punto scusarsi, allegando che egli li trascura « come dei granelli di sabbia in rapporto al mare » [1]. Egli li trascura, perchè questi infinitamente piccoli di un ordine superiore sono senza influenza sui limiti. Egli non si vale di un'approsimazione spinta troppo oltre; ma usufruisce di un diritto rigoroso, assoluto, e le sue conclusioni sono tanto evidenti, quanto i teoremi di Euclide.

Questo è il gran principio della semplificazione delle equazioni infinitesimali: principio su cui si è tanto discusso e che non è sempre stato presentato in maniera sodisfacente. [2]

Qualora ne penetriamo bene lo spirito, vi si attinge la convinzione non soltanto della assoluta esattezza dei procedimenti analitici; ma anche della loro perfetta rassomiglianza con quelli dell'algebra ordinaria. Una volta ottenuta la mèssa in equazione, si fa uso di un congegno ugualmente sicuro; si ricercano quantità non meno fisse e determinate, cioè

(1) Detto celebre attribuito a Leibnitz. Non sarebbe la prima volta — nè l'ultima — che un inventore di genio non avesse scorto immediatamente la ragione filosofica della sua scoperta.

(2) L'illustre Lazzaro Carnot, per giustificare la severità del calcolo infinitesimale, ancora imperfettamente

a dire limiti, e si giunge a risultati addirittura scevri d'errore, sia pure minimi.

Il metodo infinitesimale si riassume dunque in questa duplice operazione:

1.° Sostituire gli elementi reali del problema con elementi sussidiari suscettibili di accostarsi indefinitamente ai primi;

2.° Sopprimere puramente e semplicemente, nel corso dei calcoli, le quantità suscettibili di divenire infinitamente piccole in rapporto a quelle di cui ci proponiamo di determinare i limiti.

---

stabilito al suo tempo, aveva immaginato una spiegazione molto ingegnosa, ma, secondo me, assai poco filosofica: « Trascurando, egli dice, come assolutamente nulle, le quantità che posson essere supposte piccole quanto si vuole, quand'esse si trovano aggiunte ad altre che non possono alla stessa guisa essere supposte tanto piccole, come si vuole, o che se ne trovano separate è evidente che gli errori che possono nascere nel corso del calcolo, o alterarne il risultato potranno similmente essere supposti tanto piccoli, come si vorrà: dunque rimarrà in questo risultato qualche cosa di arbitrario, ciò che è contro l'ipotesi, poichè tutte le quantità arbitrarie sono supposte interamente eliminate ». (*Réflexions sur la Méthaphysique du Calcul infinitésimal*, 4ª edizione, pag. 24).

Il ragionamento di Carnot si fonda su questo fatto

La semplicità teorica non lascia niente a desiderare. Ma, in pratica, il metodo presentato così, porta con sè gravi inconvenienti. L'obbligo in cui ci si mette, per ogni questione, di cominciare con una digressione, col fine di trovare variabili, che possano avere per limiti gli elementi dati, riconduce a tutta la serie delle considerazioni proprie a questo genere di ricerche. Pare nondimeno che si sarebbe dovuto edificare una volta per sempre. Quale necessità, per esempio, di ricor-

---

che le operazioni del calcolo infinitesimale, conducendo sempre a relazioni tra quantità finite, eliminano per conseguenza gli infinitamente piccoli, che figuravano erroneamente e quindi raddrizzano, o compensano gli errori, che s'erano potuti commettere nelle equazioni del principio e che egli perciò chiamava imperfette: « Io chiamo, egli dice, *equazione imperfetta*, ogni equazione la cui esattezza rigorosa non è dimostrata, ma di cui si sa peraltro che l'errore, se ve n'ha uno, può essere supposto tanto piccolo, quanto si vuole; cioè a dire tale, che per rendere questa equazione perfettamente esatta, basta sostituire alle quantità che ci sono, o solamente ad alcune tra esse, altre quantità che ne differiscono infinitamente poco ». (*Idem*, pag. 30)

Le equazioni imperfette di Carnot sono equazioni di transizione, come noi le abbiamo chiamate, perfettamente esatte, in questo senso che esse sono il preludio di un passaggio ai limiti, nel quale gli infinitamente piccoli di ordine superiore non avranno nessuna azione.

dare a ogni occasione, che una curva è il limite dei poligoni, il cui numero di lati aumenta incessantemente? o che un movimento variato è il limite di una successione di movimenti uniformi, la cui durata diminuisce indefinitamente?

Esprimersi così è lo stesso che dire, che i piccoli archi di curva differiscono dalle loro corde, e i piccoli movimenti variati dai movimenti uniformi, di quantità infinitamente piccole relativamente a sè stesse. Ora, due variabili, la cui differenza diventa infinitamente piccola in rapporto a sè stesse, possono essere sostituite l'una all'altra, senza rischio d'errore nel risultato finale. Da questo all'affermare che i piccoli archi di curva sono assimilabili a linee rette, e i piccoli movimenti variati a movimenti uniformi; o meglio ancora: a dire assolutamente che i piccoli archi di curva sono rettilinei e i piccoli movimenti variati sono uniformi, non c'è in realtà che un passo. E questo passo fu saltato da Leibnitz e dai suoi discepoli.

Bisogna compiacersene, perchè è l'origine del grande slancio dato all'analisi infinitesimale. Questa scienza non è veramente entrata nel dominio pubblico, se non il giorno,

in cui è stato ammesso: che le curve sono composte di un'infinità di linee rette infinitamente piccole, o di *elementi* rettilinei; che il movimento variato è composto di un'infinità di movimenti uniformi infinitamente brevi o di *elementi* uniformi; che una superficie curva è composta di una infinità di superficie piane infinitamente piccole, o di *elementi* piani; che il raffreddamento di un corpo avviene per mezzo di una serie di raffreddamenti *elementari*, durante ciascuno dei quali, la velocità rimane costante, ecc. In una parola, le grandezze di ogni natura sono state scomposte idealmente in elementi più semplici, tra i quali divien possibile, in ragione appunto di questa semplicità, di stabilire relazioni, che sfuggono, allor che si vuole precisarle direttamente tra gli elementi reali.

Questa maniera di decomposizione, o per parlare più correttamente, l'*assimilazione* degli elementi reali agli elementi fittizi è evidentemente legittima. Poichè in sostanza è una maniera velata e spedita di praticare il metodo dei limiti. Si suppone percorsa, senza enunciarla, tutta la serie preliminare delle investigazioni e dei ragionamenti impliciti in questo metodo. Ci si fonda su di essi tacita-

mente, ma molto direttamente. Gli si deve, per conseguenza, la severità di cui il procedimento spedito ha bisogno.

La connessione non è stata riconosciuta in principio. Leibnitz, procedendo diritto alla verità, sorvolando sui gradi intermedii, per cui deve passare la maggior parte degli uomini, non ha formulato la ragione della sua scoperta. S'è limitato a giustificarla con risultati maravigliosi; e ha dato, quasi per divertimento, la soluzione di problemi considerati fino allora insolubili. Ma oggi non è più permesso di contentarsi di una dimostrazione, in qualche modo sperimentale, nè di affermare sulla fede del genio. È necessario di far poggiare l'edifizio su basi indiscutibili. La teoria dei limiti sola ha potuto fornirle.

Il metodo di assimilazione, o il metodo leibnitziano, appunto per le facilità che esso offre, per la rapidità a cui indirizza gli operatori, non è immune da taluni pericoli. In mancanza d'una sufficiente riflessione, si è esposti ad assimilare elementi in sostanza molto dissimili, perchè non appartengono allo stesso ordine di piccolezza. Il movimento variato, per esempio, è occasione di assimilazioni

molto diverse, tra le quali bisogna saper discernere. Si vuole determinare la velocità, in un dato momento? Il movimento è considerato come costante, a partire da questo momento, durante un tempo infinitamente breve, e la forza è ritenuta nulla durante questo medesimo tempo. Si vuole misurare la tendenza del mobile ad abbandonare la curva o, secondo l'espressione comune, calcolare la forza centrifuga? Il punto di vista cambia immediatamente. Questa forza motrice, dianzi nulla, è attualmente considerata come costante; è scomposta in una forza tangenziale e in una forza normale, e si ricerca lo spazio che questa fa percorrere al mobile verso il centro della curva. Così la componente normale e il percorso corrispondente sono trascurati o ritenuti secondo la natura del quesito posto. Grande dunque deve essere la diligenza nel determinare l'ordine di picciolezza delle quantità in esame; poichè certi infinitamente piccoli trascurabili di fronte ad alcune tra esse, non lo sono di fronte a certe altre. Prima di tutto, non bisogna, s'è detto, associare se non quantità dello stesso ordine e non sostituire l'uno all'altro con elementi di cui la differenza non sia infinitamente piccola in rapporto a sè stessi.

Nel caso del movimento variato, lo spazio percorso sulla curva o sulla tangente è un infinitamente piccolo del primo ordine; lo spazio percorso sulla normale è un infinitamente piccolo del secondo ordine. La lunghezza descritta in virtù della sola velocità acquistata è un infinitamente piccolo del primo ordine; l'accrescimento di lunghezza dovuto all'azione della componente tangenziale è un infinitamente piccolo del secondo ordine. Queste diverse quantità non potrebbero dunque essere indifferentemente sostituite l'una all'altra.

Tale è nella sua essenza il celebre metodo del filosofo tedesco. Non si potrebbe, tra gli altri vantaggi, negargli una qualità in tutto eminente: di essere cioè maravigliosamente adatto alla conformazione della nostra intelligenza, non che ai procedimenti della natura, o per lo meno al nostro modo di concepirli. La decomposizione della grandezza continua in una molteplicità di piccole parti, specie di scala, i cui limiti divengono sempre meno distanti, è la migliore rappresentazione, ai nostri occhi, del fenomeno della crescenza o della decrescenza. Senza dubbio, noi abbiamo l'idea della variazione continua, ma non ne

abbiamo l'immagine; noi siamo obbligati a ricorrere sempre a piccoli salti successivi. Noi non immaginiamo altrimenti il moto di un mobile, che descrive una curva nello spazio.

La concezione di Leibnitz è la generalizzazione di questa idea. Essa riconduce il continuo ai suoi elementi infinitesimali, come farebbe un chimico scomponendo un corpo nelle sue ultime particelle. Il maggior merito di questo grand'uomo, è di aver riconosciuto che l'introduzione d'una simile ipotesi non vizia per nulla il calcolo. A condizione di considerare gli elementi come veramente infinitesimali, o come suscettibili di discendere al disotto di ogni valore assegnabile, l'esattezza del suo procedimento è ineccepibile. Avrebbe dovuto dare la *dimostrazione* di questa esattezza, vale a dire che la mira, che si ha di passare, più o meno esplicitamente ai limiti, toglie ogni importanza alle differenze che possono sorgere dalla introduzione di elementi fittizi al posto di elementi reali; ma egli ha lasciato questo compito ai suoi successori.

I geometri greci avevano intuito parzialmente questa verità. La misura del cerchio e dei tre corpi rotondi, nella geometria di Eu-

clide, le dimostrazioni di Archimede per mezzo di figure più complicate, racchiudono in germe l'analisi infinitesimale. Ma privi, com'erano, delle formule algebriche; non avendo, come Leibnitz e Newton, a loro disposizione, gli ammirevoli lavori del Viéte e soprattutto del Descartes, non poterono elevarsi all'altezza di un metodo generale e ancora meno istituire un procedimento regolare, paragonabile per la sua sicurezza al calcolo differenziale e al calcolo integrale. Nondimeno le loro ricerche, sia pure incomplete, permettono di rannodare la catena del passato. Il lungo sforzo che, dopo più di duemila anni, doveva far capo all'analisi attuale, mostra lo spirito umano costantemente fedele a sè stesso, procedendo sempre senza deviare, estendendo e generalizzando i suoi metodi, ma non perdendo mai di vista l'idea prima che li aveva inspirati.

# CAPITOLO VII.

## DEL CALCOLO INFINITESIMALE.

Il calcolo infinitesimale ha per scopo di risolvere le equazioni stabilite con l'aiuto del metodo, o di determinare il valore dei limiti, le cui espressioni figurano nelle equazioni.

Si potrebbe credere a prima vista che queste espressioni rivestano le forme più varie. Niente affatto. Nonostante il numero immenso di questioni, la cui soluzione ci interessa, i tipi dei limiti destinati a figurarvi sono ridotti a due solamente. L'insufficienza sembrerebbe evidente, se noi non ci ricordassimo quanto poco numerosi siano i concetti essenziali della mente nostra e a quale molteplicità d'usi ciascuno d'essi sembra essere riservato. Che cosa di più comprensivo, per esempio, dell'idea di *relazione*, la quale fa capo finalmente, col pericolo di perdere ogni precisione, o ad un'eguaglianza o ad una equazione tra le quantità sott'occhi?

Invano noi cercheremmo di farci un concetto chiaro di relazione, tranne di questo unico concetto di eguaglianza. Da qualsiasi punto noi partiamo, noi siamo inevitabilmente ricondotti ad una equazione tra combinazioni diverse, ottenute col mezzo delle operazioni proprie della matematica. Del resto, il linguaggio ordinario porta l'impronta della nostra propensione a subordinare le nostre cognizioni sotto singole categorie, generalmente associate a coppie. La *negazione* e *l'affermazione* il *pro* e il *contro*, il *tutto* e la *parte*, il *finito* e l'*infinito* sono altrettante manifestazioni di questa forma del nostro intelletto. Non bisogna quindi maravigliarsi, se i tipi di limiti siano in così piccolo numero.

Ce ne meraviglieremo meno ancora ricapitolando le operazioni matematiche, alle quali la nozione di limite deve essere adattata. Di decomposizione in decomposizione, bisogna sempre giungere alle operazioni elementari, alle funzioni irreducibili, designate sotto il nome di *algoritmi*. Se riprendiamo l'enumerazione fatta nel capitolo III, noi riconosceremo che le quattro funzioni essenziali, su cui la nozione di limite possa utilmente portarsi, sono: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione.

Ma che senso avrebbe il limite di una sottrazione, di cui i due termini fossero degli infinitamente piccoli dello stesso ordine, come la corda e l'arco sotteso? Evidentemente questa differenza convergerebbe verso zero e non offrirebbe interesse alcuno. Accadrebbe lo stesso del limite di una moltiplicazione, di cui i due fattori avessero valori infinitamente piccoli. Il prodotto sarebbe un infinitamente piccolo di ordine superiore, di cui la valutazione sarebbe senza utilità. Al contrario, il limite di una divisione può essere molto importante. Mentre il dividendo e il divisore diminuiscono, il quoziente non cessa di avere un valore finito, e questo valore tende verso un limite fisso, quando il dividendo e il divisore stessi tendono verso zero. Similmente, una somma di infinitamente piccoli può avere e ha generalmente un limite finito, quando il numero dei termini aumenti in proporzione della loro piccolezza. Il calcolo infinitesimale si applica dunque ai limiti di rapporto e ai limiti di somme. Esso si propone di stabilire certi procedimenti metodici, con l'aiuto dei quali, questi limiti potranno essere effettivamente valutati in ciascun caso particolare.

Senza dubbio tutti gli oggetti della natura,

e quelli che escogita il genio dei geometri, non sono compresi in questi due concetti. Se ne può immaginare un numero infinito, la cui espressione esigerebbe altre specie di limiti. Tuttavia, sebbene il campo resti teoricamente aperto, dopo tre secoli, non si è creato una forma di limite nuova. Il memorando sforzo di Lagrange, che termina al *calcolo delle variazioni*, non procede da una idea differente da quelle di Newton e di Leibnitz. Dal punto di vista filosofico, noi siamo rimasti in possesso dei due soli tipi messi in evidenza dai primi inventori.

I limiti così ristretti non offrono tuttavia meno un'immensa utilità, poichè s'adattano a un numero d'oggetti a dirittura straordinario. Essi corrispondono a quelli più meritevoli di attrarre la nostra attenzione e, se potessero essere adoperati interamente, lascerebbero fuori pochi casi di vera importanza, di cui noi siamo troppo spesso nell'impossibilità di trovare praticamente i valori. Noi incontriamo i limiti del calcolo prima di quelli della concezione metafisica.

I limiti di rapporto si presentano specialmente in due serie di problemi, di ordine

estesissimo, e che in sostanza si ricongiungono tutte e due allo stesso concetto. Sono i teoremi di tangenza in geometria e quelli di velocità in meccanica.

L'idea di velocità, lo abbiamo già osservato, va oltre i termini della meccanica. Essa si estende a tutti i fenomeni; in cui si ricerca la legge di variazione di un elemento, in rapporto alla durata. Ho citato fatti di ordine fisico, chimico e anche sociale, in occasione dei quali sorge naturalmente la nozione di velocità. Si potrebbe generalizzare ancora di più e concepire la velocità come rapporto delle variazioni di due quantità, quali si sieno, in cui l'una, presa come termine di paragone, si suppone ingrandisca uniformemente; si immagina così una specie di velocità metaforica. Si può valutare, per esempio, la legge della profondità del mare, secondo la distanza dalla riva, o la legge della distribuzione della temperatura in un corpo omogeneo, secondo la distanza dal fuoco. Questi rapporti, che non hanno, lo riconosco, con la velocità se non un'analogia molto lontana, hanno ricevuto da noi nomi differenti, secondo la natura dei fenomeni. Quello di *pendìo*, o *d'inclinazione* è uno dei più usitati. Il calcolo

del limite s'effettua d'altra parte con gli stessi procedimenti.

Le questioni di tangenza, di cui i geometri s'occupavano con tanto ardore, prima della scoperta del calcolo infinitesimale, si connettono all'idea di inclinazione e per conseguenza a quella di velocità generalizzata.

Inoltre, la tangenza non si separa dalla velocità del problema meccanico. In fatti, nel movimento curvilineo di un mobile, la velocità è ad ogni istante diretta seguendo la tangente alla traiettoria, e la sua grandezza è misurata dal rapporto dell'elemento tangenziale descritto all'elemento del tempo. La inclinazione della tangente segna dunque ad ogni istante la direzione del movimento. La maniera in cui quest'inclinazione varia, da un punto all'altro della traiettoria, segna la intensità della componente normale, che tende a rigettare il mobile verso il centro della curva. I termini di tangenza, studiati separatamente dai quesiti di movimento, formano un capitolo importante della geometria.

I limiti di somma non hanno un'importanza minore. Essi servono particolarmente alla determinazione delle quantità, che sono per così dire reciproche della tangenza e della velo-

cità; io voglio designare gli spazi percorsi e le lunghezze delle curve. Il cammino descritto da un mobile può essere considerato come il soggetto di un problema inverso a quello della velocità. Se si conoscesse la velocità ad ogni momento, se ne dedurrebbe lo spazio percorso; esso sarebbe rappresentato dalla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando, ad ogni momento, la velocità per una durata infinitamente piccola. Tutto si riduce dunque a calcolare effettivamente questa somma, cioè a valutare il limite verso il quale converge la somma dei termini infinitamente piccoli, corrispondente alle velocità successive.

In questa ricerca e in tante altre, il limite di somma risveglia l'idea di generazione o di causa. Lo spazio percorso è veramente generato dalla velocità. La velocità a sua volta, è generata dalla forza motrice, ed è espressa dalla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando, ad ogni momento, l'intensità della forza per la durata infinitamente piccola della sua azione. La stessa osservazione si estende a tutti i problemi naturali, nei quali si è condotti a considerare una specie di velocità, analoga alla velocità meccanica, è un'azione determinante, analoga alla forza motrice.

In geometria l'idea di causa non può essere invocata direttamente. Tuttavia ci si è condotti, se si vogliono considerare le linee come generate dallo spostamento di un punto materiale. Il perimetro d'un arco di curva offre allora molta analogia con una porzione di traiettoria. La sua lunghezza è espressa dalla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando l'inclinazione della tangente in ciascun punto per l'accrescimento infinitamente piccolo della coordinata curva. Similmente per la superficie compresa nell'interno di una curva. Si può considerarla come generata da una retta, che si sposti parallelamente a sè stessa, poggiando i suoi estremi sulla curva. Questa superficie è, per conseguenza, espressa dalla somma di un'infinità di termini eguali ciascuno al prodotto della retta per il suo spostamento infinitamente piccolo.

Il limite di rapporto risveglia piuttosto l'idea di concomitanza o di una relazione di posizione. La direzione d'una tangente è in relazione di posizione con le coordinate della curva. La velocità di un mobile, dedotta dallo spazio percorso, è un fatto concomitante con questo percorso, in un tempo infinitamente breve.

L'accelerazione o l'accrescimento di velo-

cità è anche un fatto concomitante con l'accrescimento dello spazio percorso durante due istanti consecutivi. In simile caso, l'idea di generazione non si presenta alla mente. Ma abbiamo notato nondimeno che la velocità, invece di essere dedotta dal rapporto dello spazio percorso alla durata impiegata, può essere considerata come il limite della somma dei termini ottenuti moltiplicando la forza per le durate elementari. Questo esempio di un oggetto considerato, secondo il punto di vista che prevale, ora come un limite di somma, ora come un limite di rapporto, come un effetto o come una causa (effetto riguardo alla forza e causa riguardo allo spazio percorso), non ci deve sorprendere. Poichè noi sappiamo che nella concatenazione dei fenomeni, ciascun d'essi è alternativamente causa ed effetto: effetto in rapporto a quello che lo precede e causa in rapporto a quello che lo segue. Non ci dobbiamo dunque maravigliare se nella meccanica, che è la prima delle scienze fisiche, le nostre concezioni si risentano di questa nozione generale sulla coordinazione dei fatti nel tempo.

Il ramo dell'algebra che ha per scopo il calcolo dei limiti di rapporto ha avuto il

nome di *calcolo differenziale*, e quello che ha per fine il calcolo dei limiti di somma ha avuto il nome di *calcolo integrale*. Quest'ultima denominazione si spiega da sè: si tratta di calcolare l'*integrità* o l'intero di cui ciascuno dei piccolissimi termini è una parte.

Il limite di rapporto si ottiene con un procedimento che non è mai in fallo. Il principio ne è noto: la variabile indipendente riceve un accrescimento finito e la funzione è sviluppata in serie, secondo le potenze ascendenti di questo accrescimento. Il rapporto dell'accrescimento della funzione all'accrescimento della variabile riveste la forma di un poligono, di cui il primo termine è una certa funzione algebrica, detta *derivata prima* (perchè deriva dalla funzione data secondo leggi costanti), e di cui tutti gli altri termini sono derivati dalle potenze ascendenti dell'accrescimento della variabile indipendente. Quando si passa al limite, cioè quando si suppone l'accrescimento infinitamente piccolo, tutti i termini, ad eccezione del primo, che non è toccato da questo accrescimento, tendono ad annullarsi e spariscono dinanzi ad esso, in virtù della regola che permette, in un calcolo

di limiti, di sopprimere le quantità infinitamente piccole e ritenere solamente le quantità finite. Il limite cercato ha dunque per valore il primo termine, o la derivata prima della funzione.

Questa derivata può sempre essere calcolata. In effetti, la derivata della funzione più complessa si rannoda alle derivate delle funzioni semplici. Queste sono state determinate una volta per sempre e formano una specie di *tavola* di Pitagora. L'algebrista si limita a consultare questo elenco, dopo aver ridotto la funzione composta in funzioni semplici; allo stesso modo che egli riconduce la moltiplicazione dei più grandi numeri a quelle delle nove prime cifre.

La derivata prima, limite del rapporto dell'accrescimento della funzione all'accrescimento della variabile, possiede un valore finito nelle funzioni continue. Si citano tuttavia alcune funzioni artificialmente immaginate dai geometri, le quali, pur essendo continue, possono non avere una derivata finita. Io non mi fermerò su queste eccezioni, che non hanno relazione con i fenomeni reali e che, io credo, all'infuori della curiosità matematica, non presentano molta utilità.

Secondo l'espressione e secondo il linguaggio di Leibnitz, il limite di un rapporto è « il rapporto dell'accrescimento infinitamente piccolo della funzione all'accrescimento infinitamente piccolo della variabile »; nell'ipotesi, beninteso, di un passaggio ulteriore ai limiti. In virtù di questa definizione, e sempre con la stessa ipotesi, l'accrescimento infinitamente piccolo della funzione è eguale al prodotto della derivata per l'accrescimento infinitamente piccolo della variabile. Fino a quando il passaggio ai limiti non ha effettivamente luogo, questa eguaglianza non è esatta. Il prodotto rappresenta solamente una parte dell'accrescimento della funzione, detta altrimenti la differenza parziale tra due valori della funzione, corrispondenti a due valori distinti della variabile. La contrazione dei due vocaboli « differenza » e « parziale » ha dato il vocabolo *differenziale*, con cui questo prodotto è definitivamente designato. Il calcolo differenziale significa dunque calcolo delle differenziali o delle derivate.

I limiti di somma hanno, come i limiti di rapporto, e sotto le stesse condizioni, valori finiti, allorchè le funzioni partecipano della

continuità. Ma il calcolo integrale manca di un procedimento regolare e sicuro per determinarli. « Accade di queste due parti dell'analisi delle funzioni (calcolo differenziale e calcolo integrale, dice Lagrange, come di quelle dell'aritmetica e dell'algebra, che hanno per oggetto le operazioni dirette della moltiplicazione e dell'elevazione a potenze, e le operazioni inverse della divisione e dell'estrazione di radici. Le operazioni della prima specie sono sempre possibili con le regole note e dànno sempre risultati esatti; quelle della seconda specie, al contrario, non lo sono che in taluni casi, parlando rigorosamente, e in tutti gli altri non possono dare che risultati approssimativi (1) ».

Nessuno ignora che, se è facile moltiplicare un numero per sè stesso o di formarne il quadrato, è generalmente impossibile il trovare un numero che moltiplicato per sè stesso riproduca il numero dato o ne sia la radice quadrata. Tuttavia questa radice esiste virtualmente; in alcuni casi anzi noi sappiamo raffigurarla in maniera evidentissima. Se il lato di un quadrato geometrico, per esempio,

---

(1) *Théorie des fonctions analytiques*, p. 124.

è eguale all'unità, la diagonale di questo stesso quadrato rappresenta la radice del numero due, di cui l'espressione aritmetica sfugge ai nostri mezzi. Similmente, le integrali esistono virtualmente, ma noi non sappiamo trovarle o esprimerne i valori. Noi siamo costretti per lo più a procedere per tentativi.

E cosa davvero degna di ammirazione che con un istrumento tanto imperfetto, i geometri siano giunti, a forza di artifizi e di espedienti ingegnosi, a calcolare, se non esattamente, per lo meno con approssimazione sufficiente, un grandissimo numero di integrali, e a risolvere le questioni più importanti delle matematiche e della fisica. I lavori del secolo presente, se non sono riusciti a una concezione interamente nuova, come quella di Descartes o quella di Leibnitz, attireranno l'attenzione delle posterità per lo sviluppo prodigioso dato all'applicazione delle concezioni anteriori.

La reciprocità tra la *differenziazione* e l'integrazione, a cui ho fatto ora allusione, non è evidente *a priori*, come la reciprocità tra la moltiplicazione e la divisione; ma con un po' d'attenzione non si tarda a scoprirla. In

effetto, l'accrescimento di una funzione è eguale al prodotto della derivata di questa funzione per l'accrescimento della variabile indipendente, più una quantità che converge verso zero nello stesso tempo di questo accrescimento della variabile. Supponiamo che la funzione cresca per gradi successivi, da un certo valore della variabile fino a un altro valore più o meno lontano. La differenza dei valori della funzione, tra questi due valori estremi della variabile, sarà eguale: 1.° alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascuno dei valori intermedi della funzione per l'accrescimento intermedio della variabile; 2.° a una somma di termini che convergono tutti verso zero, se si restringono sempre più i gradini della variabile, o se la si fa crescere a gradi sempre più prossimi. Alla fine, tutti questi termini scompariranno e la differenza dei valori delle funzioni, tra i valori estremi della variabile, sarà semplicemente eguale alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando i valori successivi della funzione per l'accrescimento infinitamente piccolo della variabile. In altri termini questa differenza sarà eguale alla integrale della funzione; e reciprocamente, questa funzione sarà la propria derivata della quantità proposta.

Per conseguenza la ricerca dell'integrale di una funzione passa ad essere la ricerca di una quantità, di cui la derivata sia eguale alla funzione data. In quel modo che la ricerca di una radice non è altro, che la ricerca di una quantità, di cui la potenza sia eguale al numero dato. La reciprocità tra le due operazioni è dunque perfetta. Se mi sono ingegnato metterla in rilievo, non è per entrare nella parte tecnica, ma per mostrare il procedimento intellettuale con cui, una volta ancora, noi associamo le nostre cognizioni a gruppi binari, a termini inversi. La natura, nelle sue manifestazioni, sembra avere seguito spesso un cammino analogo. Indipendentemente dalla grande legge dell'azione e della reazione, essa ci mostra, in fisica, le elettricità di termini opposti (io mi uniformo all'antica terminologia), e in chimica le combinazioni acide e *basiche*; e si potrebbero citare molti altri esempi.

C'è un'altra proposizione che riporterò, malgrado il suo aspetto un po' arido, poichè essa rischiara egregiamente il meccanismo infinitesimale.

Le differenziali successive di una funzione si digradano nello stesso ordine di grandezze

degli infinitamente piccoli. La differenziale prima è un infinitamente piccolo del primo ordine; la differenziale seconda è un infinitamente piccolo del secondo ordine; la differenziale terza è un infinitamente piccolo del terzo ordine; e così di seguito.

Una tal maniera di decrescimento non si riconosce a prima vista. Sembrerebbe piuttosto che la differenziale seconda (differenziale tra le due differenziali primitive corrispondenti a due valori consecutivi della variabile) dovrebbe essere dell'ordine di queste due differenziali, vale a dire dovrebbe essere come esse un infinitamente piccolo del primo ordine. Perchè essa è invece del secondo? Ricordiamoci che la differenziale prima è eguale al prodotto della funzione derivata per l'accrescimento della variabile. Se si prendono i valori di questa funzione derivata per due valori consecutivi della variabile, la differenza, in virtù della legge di formazione della differenziale, sarà espressa dalla derivata della funzione derivata, o dalla derivata seconda, moltiplicata per l'accrescimento della variabile. La differenziale seconda si troverà dunque espressa dal prodotto della derivata seconda per il quadrato dell'accrescimento della

variabile, cioè per un infinitamente piccolo del secondo ordine. Ragionamento identico per le differenziali seguenti.

È un fatto molto notevole, che le derivate superiori alla prima, essendo definite indipendentemente dagli accrescimenti della funzione primitiva, e, d'altra parte, le differenziali superiori alla prima; essendo definite senza preoccupazione delle derivate, esiste, tra queste quantità in apparenza estranee l'una all'altra, la stessa relazione semplice e armonica che costituisce la derivata del primo ordine. La concatenazione delle derivate successive è dunque ancora più stretta di quel che non s'era in diritto di inferirla dalla loro propria definizione. Perciò alcuni autori hanno voluto rovesciare i termini e definire le derivate secondo questa relazione stessa. Ma il cammino è in questo modo meno naturale e obbliga d'altra parte a dimostrare più tardi che la derivata di un certo ordine è la derivata della derivata precedente.

L'ordine di decrescimento delle differenziali le rende maravigliosamente atte a rappresentare le diverse categorie d'infinitamente piccoli, che noi incontriamo nelle figure geo-

metriche, o nei fenomeni naturali. Così, quando un mobile è spinto da una forza continua, l'accrescimento della velocità, durante un istante, è un infinitamente piccolo del primo ordine ed è espresso dalla differenziale prima. La variazione dello accrescimento, tra due istanti consecutivi, è un infinitamente piccolo del secondo ordine ed è espressa dalla differenziale seconda. Allo stesso modo quando un vaso si vuota per un orifizio inferiore, il rallentamento dello scolo, tra due istanti consecutivi, è una differenziale del secondo ordine.

Però è stato detto assai giustamente che l'analisi infinitesimale è egualmente ben appropriata ai procedimenti della natura e alle concezioni della ragione. Essa pare che formi un legame tra l'intelligenza umana e il mondo esterno, e ciò è il più bello elogio che le si possa fare.

---

## CAPITOLO VIII.

### L'analisi infinitesimale e la materia.

L'analisi infinitesimale si fonda sulle idee di continuità e di divisibilità all'infinito. Come i suoi procedimenti si sono resi applicabili al mondo della materia, nel quale noi non incontriamo che il discontinuo e la divisione limitata?

Noi dobbiamo far distinzione dapprima tra i corpi e i loro fenomeni.

I corpi, appunto perchè porzioni di materia diversamente agglomerata, sono tutti discontinui. Lo sono anzi talora tanto, che il vuoto supera di molto il pieno. Per conseguenza la figura di un corpo è una parvenza fallace. Noi non abbiamo sotto gli occhi il volume realmente occupato dalla materia ma la forma geometrica risultante da un complesso di particelle più o meno distanti le une dalle altre. Il volume apparente è sempre superiore a quello che la materia occupe-

rebbe, se potesse essere condensata in maniera da non lasciare interstizi. L'applicazione non soltanto dell'analisi infinitesimale, ma di ogni metodo geometrico alla misura della superficie e del volume non potrebbe dare risultati rigorosamente esatti. Accade lo stesso per ogni procedimento tendente a determinare le densità. Le cifre ottenute si riferiscono a corpi apparenti o fittizi, non alla materia stessa di cui questi corpi sono composti e sulla quale noi crediamo di operare.

Ma la pratica delle cose e i bisogni delle arti non ci obbligano in generale ad un'esattezza troppo minuziosa. Perciò siamo d'accordo comunemente nel considerare i corpi tali, quali ci appaiono. Noi facciamo astrazione, specialmente nei liquidi e in un gran numero di solidi, dai vuoti che possono esistere tra le particelle e a più forte ragione tra gli elementi costitutivi di una particella. Noi ragioniamo come se la materia fosse uniformemente sparsa nel volume del corpo, senza soluzione di continuità. In una parola noi sostituiamo al corpo reale una specie di corpo *medio* e le nostre determinazioni si formano oramai su medie. La densità, la capacità calorifica, la coesione, non sono quelle

della sostanza che forma il corpo, ma esse rappresentano una riduzione nella proporzione del pieno al volume apparente. Del pari la superficie del corpo è valutata senza tener conto delle alternative di vuoto e di pieno: essa ritiensi rappresentare il solo sviluppo della sostanza,

Questa maniera di vedere è esente da inconvenienti pratici e per conseguenza è regolare. Sarebbe d'altronde per lo più impossibile di fare altrimenti, poichè non dipende da noi di sceverare la materia e studiarla allo stato di continuità perfetta. Noi abbiamo interesse di conoscere, non le proprietà dei corpi teorici, ma le proprietà dei corpi, così come si presentano in natura. Ciò solo importa ai nostri bisogni e in molti casi pure alle nostre speculazioni scientifiche. L'ipotesi della ripartizione uniforme e continua della materia, che riesce alla costituzione di un corpo medio, è in armonia con la realtà delle nostre impressioni e con le esigenze dei nostri procedimenti di determinazione.

A corpi così concepiti, l'analisi infinitesimale è veramente applicabile. La misura delle superficie e dei volumi, specialmente, non va soggetta a difficoltà, più che nei solidi

geometrici. Accadrà lo stesso della densità, che risulta dalla misura diretta del peso in rapporto al volume; o della capacità calorifica, che risulta dalla misura diretta di una quantità di calore in rapporto al volume o al peso.

Vengo ora a una classe di fatti, a cui l'analisi infinitesimale si adatta naturalmente, senza che sia nemmeno necessario di fare un'ipotesi simile a quella, che riguarda la costituzione fisica dei corpi. Intendo parlare degli innumerevoli fenomeni inerenti al tempo e particolarmente di quelli che implicano l'idea di movimento.

Quando un corpo si sposta nello spazio, la sua traiettoria, la sua velocità, le variazioni di questa velocità sono quantità continue. Non potrebbe essere altrimenti che se i corpi avessero la proprietà di mutare repentinamente velocità o direzione, in un istante indivisibile. Ma l'esperienza mostra che questo non succede mai. Nei fenomeni più rapidi, in quelli che altra volta si specificavano come *istantanei*, come gli urti e le esplosioni, scorre sempre una durata finita. Le reazioni chimiche, d'ordinario così fugaci esigono pure un

certo tempo. Non è nemmeno ben sicuro che la velocità, con cui le molecole si precipitano le une sulle altre, sia molto grande, data la debole distanza da cui sono separate.

Del resto più ci eleviamo al disopra dell'orizzonte limitato nel quale si svolge la nostra esistenza, più noi sentiamo come queste questioni di velocità sono relative. Noi abbracciamo parti dell'universo molto vaste, e i termini perdono il loro senso comune. I movimenti qualificati da noi come rapidi sembrano compiersi con una lentezza enorme. Niente di più istantaneo certamente sul nostro globo della trasmissione della luce, che percorre venti volte la lunghezza dell'asse terrestre in meno di un secondo. Già questa nostra impressione si modifica, se noi pensiamo che questa stessa luce impiega quattro ore per giungere dal sole al pianeta Nettuno. Ma che succederà, quando gli astronomi ci diranno che essa impiega trentamila anni da un'estremità all'altra della Via lattea? In verità, se quest'ultima cifra fosse solo enunciata, e non avessimo presenti alla mente gli altri dati, noi saremmo tentati di notare che la luce è un agente assai lento nella sua progressione.

Gli elementi dei fenomeni dinamici, velocità, traiettoria, accelerazione, sono dunque grandezze continue aventi durate più o meno brevi, ma sempre finite. Le forze, dal canto loro, agiscono in maniera continua e le variazioni della loro intensità si operano con continuità. La maggior parte di esse, la gravitazione universale, le attrazioni molecolari sono una funzione della distanza; tra due parti di materia l'intensità varia secondo la distanza che le separa. Questa distanza essendo, come tutte le grandezze geometriche, soggetta alla continuità, le variazioni delle forze sono egualmente continue. Non apparisce d'altronde che la loro azione sia intermittente o si eserciti a piccoli sbalzi. Gli astronomi, nei loro calcoli, considerano la gravitazione come variante unicamente con la distanza. Non è mai venuto loro in mente di ammettere che questa forza avesse delle alternative, che cessasse e riprendesse la sua azione a piccoli intervalli. Le osservazioni più minute non hanno mai dimostrato che il peso di un corpo oscillasse nell'istante della durata della sua sospensione. Al contrario l'energia a cui è legata, dopo aver preso la sua forma di equilibrio, la mantiene indefinitamente sotto l'influenza del peso.

In certi casi le forze aumentano gradatamente di intensità in seguito all'accumulo della materia. Tale è il peso di un vaso che si riempie a poco a poco di liquido; tale è la pressione esercitata su d'un involucro, in cui affluisce un gaz o un vapore. Si potrebbe, rigorosamente parlando, sostenere che, il liquido o il gaz essendo formato da particelle distinte, l'accrescimento del peso o della pressione si effettua a piccole aggiunte consecutive e che la continuità matematica non esiste. Ma chi non vedrà in ciò un semplice gioco di spirito, poco degno di fermare la nostra attenzione. Le cose accadono per noi, come se la continuità fosse reale; l'errore commesso è di molto inferiore a quello, a cui trascinano i metodi di misure più perfezionati. A più forte ragione questa conclusione si applica ad agenti in altro modo sottili, al calorico o all'elettricità. Bisognerebbe essere veramente propensi al paradosso per pretendere che l'accumularsi del calorico non avviene in maniera continua, ma risulta da una serie di vibrazioni tra le quali la distinzione deve essere mantenuta.

Così i fenomeni che sono inerenti all'idea di successione, i cambiamenti che si effet-

tuano col tempo, ci sembrano essere continui. Se non lo sono, come precisamente indica la parola, lo sono per lo meno con un'approssimazione, che supera di gran lunga quella dei nostri mezzi di osservazione e che previene qualsiasi errore apprezzabile nei calcoli.

Questa continuità, legge generale del mondo fisico era stata riconosciuta dai sapienti e dai filosofi dell'antichità. Assai prima che essa fosse stata dimostrata con l'aiuto di esperimenti scientifici l'adagio: *Natura non facit saltum*, « la natura non fa salti repentini », era proclamato come un assioma. Questa credenza fortemente radicata non ha dovuto essere estranea alla direzione data da Leibnitz a speculazioni che s'inspiravano sopratutto al principio della continuità.

Il riconoscimento di un tale principio che precede nella storia dell'umanità gli insegnamenti della scienza, si spiega assai facilmente. Risponde, in fatti, a una disposizione naturale del nostro spirito, contro cui difficilmente potremmo lottare. In ogni congiuntura, sia che si tratti di un movimento, di un cambiamento di stato, di forma, di temperatura, noi siamo portati ad attribuire l'effetto prodotto alla combinazione di due fattori: una

certa potenza e il tempo. Nessuno di questi due fattori ci pare potersi sopprimere. Affinchè la durata fosse infinitamente piccola, bisognerebbe che la potenza fosse infinitamente grande. Ora, nel regno fisico, noi non ammettiamo una forza infinita; non solamente non ne ammettiamo, ma neppure concepiamo. Per conseguenza ogni cambiamento constatato implica ai nostri occhi una certa durata. Se per lo passato l'espressione d'istantaneo era comunemente adoperata, aveva senza dubbio nello spirito dei filosofi, un senso relativo: significava che la durata era brevissima, che non poteva esser precisata con i mezzi conosciuti di osservazione.

La necessità di una durata nei fenomeni ha dovuto far supporre, prima degli insegnamenti della fisica e della chimica, la discontinuità reale dei corpi. Giacchè pare impossibile spiegare, senza discontinuità, un certo numero di fatti di cui siamo quotidianamente testimoni. Quando due corpi, animati da velocità differenti, vengono ad incontrarsi, le modificazioni causate alle velocità, in ragione di quest'urto, esigono un certo tempo, in verità assai breve. Ma come, durante un tempo

anche brevissimo, i due corpi potrebbero essere in contatto, se fossero assolutamente invariabili di forma, impenetrabili l'uno all'altro? Evidentemente in questo caso essi non si toccherebbero che durante un istante indivisibile, insufficiente, per conseguenza, al cambiamento di velocità. Questo cambiamento richiede una penetrazione reciproca, un'alterazione, durante la quale i due corpi possano continuare a muoversi in direzioni differenti, senza cessar nondimeno d'impressionarsi. Il fenomeno si compie effettivamente così, e i corpi si trovano alla fine animati da velocità spesso opposte a quelle, di cui erano dotati a principio.

Ma la penetrazione implica una costituzione interna, che permetta alle particelle materiali di avvicinarsi le une alle altre. Esse devono dunque, allo stato normale, essere, mantenute a distanza, per mezzo di forze reciproche. Queste assicurano nello stesso tempo la permanenza generale del corpo e la sua facoltà di alterazione. Esse agiscono come molle che ora restano compresse o spezzate dopo l'urto, e ora riprendono le loro disposizioni primitive, secondo la natura della sostanza. Ad ogni modo il corpo deve essere discontinuo.

Questo esempio d'un ragionamento dimostrato poi dell'esperienza, non è il solo che la storia delle scienze abbia avuto da registrare. L'uomo procede spesso così: egli mette avanti con ardimento sulla natura concezioni, che servono a guidare le sue osservazioni ulteriori. Ma queste si rivelano sempre in ultima istanza. La ragione è incapace per sè stessa di stabilire la verità fisica: essa fornisce probabilità più o meno sicure. L'errore degli antichi, perpetuato fino ai tempi moderni, è stato il credere che la metafisica potesse supplire allo studio della natura, mentre che essa si limita a proiettare sprazzi di luce sulle vie che conducono alla scoperta delle sue leggi.

Tuttavia combinazioni così fortunate (di cui avrò di nuovo occasione di parlare) tra l'intelligenza umana e il mondo esterno non lasciano indifferente il filosofo. Esse fanno nascere l'idea di un concetto generale a cui l'una e l'altro sarebbero ugualmente sottomessi e che si manifesterebbe di tanto in tanto ai nostri sguardi con alcuni tratti, che il caso non potrebbe spiegare.

Concludendo l'analisi infinitesimale, concepita dapprima per i bisogni della geometria

e adattandosi precisamente alle quantità dotate di continuità perfetta, si potè in seguito estendere alle quantità fisiche. La condizione di una generalizzazione così utile si trova nella esigua differenza che esiste tra l'ideale di continuità, rappresentato dallo spazio e dal tempo, e le realtà effettive più o meno discontinue, da cui siamo circondati. Il grado di questa differenza è la misura del grado di esattezza, che noi possiamo sperare nei risultati.

Una moltitudine di oggetti, specialmente quelli che si rivelano dalla fisica matematica, si prestano con un'approssimazione quasi indefinita all'applicazione di un tal metodo di calcolo. Donde lo sviluppo notevole avuto da un secolo da questo ramo della scienza. I limiti non sembrano sul punto di essere raggiunti; poichè le esperienze sempre più precise, istituite dai fisici e dai chimici, forniranno materiali abbondanti, sui quali l'analisi potrà esercitarsi con buon successo sempre crescente.

Tra le scienze, già formate o in via di formazione, tributarie dei metodi infinitesimali, ve n'ha una che resterà sempre in prima linea per la esattezza dei suoi risultati: è la meccanica celeste. I corpi studiati non variano

di figura e di grandezza, per lo meno durante i periodi storici. Le azioni di cui questi corpi sono il centro dipendono unicamente dalle distanze. I diversi elementi del fenomeno dinamico sono dunque funzioni dello spazio e del tempo, e godono della continuità geometrica. L'analisi infinitesimale può essere allora impiegata con la stessa sicurezza, come nelle questioni di ordine puramente matematico. Le cause d'inesattezza risiedono unicamente nell'omissione eventuale di taluni elementi reali, o negli errori che possono scivolare nel corso di calcoli tanto prodigiosi. Ma non provengono in nessun caso dall'ipotesi fondamentale, che, sotto il rapporto della continuità, assimila queste quantità alle grandezze astratte della geometria e dell'algebra. La meccanica celeste conserverà dunque su tutti gli altri rami della fisica matematica una superiorità indiscutibile.

---

II.

# MECCANICA.

## CAPITOLO I.

### La forza e la massa.

Come lo spazio e il tempo sono la base delle scienze matematiche, così la forza e la massa sono gli elementi primordiali delle scienze fisiche, e specialmente della meccanica, considerata nella sua più grande generalità. Non c'è quesito di dinamica, per complicato che esso sia, che non si riduca in ultimo alla valutazione di un rapporto tra la forza e la massa.

La nozione di forza è antica, quanto l'umanità. Fin dal suo entrare nella vita, e per la lotta contro la natura, l'uomo acquista il sentimento degli sforzi, che è obbligato a fare per accostare a sè i corpi e per respingerli, per trasportarli da un luogo a un altro e imprimer loro la velocità.

I corpi sui quali noi agiamo, si trovano in condizioni diverse, e il risultato dei nostri sforzi se ne risente necessariamente.

In un caso, il più frequente, essi sono trattenuti dagli ostacoli. Per spostarli, bisogna cominciare col vincere talune resistenze esterne. Bisogna per esempio, superare l'attrito con altri corpi, neutralizzare il peso su un declivio, più o meno inclinato; far rifluire un liquido, un gas, ecc. I corpi non entrano allora in movimento, se non quando lo sforzo supera un certo grado d'intensità, quello precisamente che corrisponde alla resistenza sviluppata dal complesso degli ostacoli. Superato questo punto, il movimento ha luogo. Ma come ha luogo? in quale relazione è esso con lo sforzo, o a parlar con più precisione, con *l'aumento* di sforzo fatto?

Per meglio rendersene conto, è meglio eliminare questo periodo preliminare, durante il quale lo sforzo deve crescere, prima di produrre alcun effetto visibile, fino a raggiungere la somma delle resistenze dovute al mezzo circondante. Immaginiamo dunque il corpo senza alcun ostacolo interamente libero, come sarebbe, suppongo, se rotolasse su un piano orizzontale perfettamente liscio, o meglio ancora, se fosse sospeso nel vuoto, all'estremità d'un filo sottilissimo. Operiamo su quello in questa situazione. Allora che ve-

diamo noi? Noi vediamo ciò che è essenziale: *Il menomo impulso produce un movimento*. Non c'è pressione per piccola che sia, la quale non sposti il corpo dalla sua posizione: esso è assolutamente movibile. La resistenza al movimento, che sembrava prima di questa situazione opporre, e che si sarebbe stati tentati di attribuirgli, non dipendeva da lui, ma dalle influenze esterne. Per sè stesso il corpo non resiste, è incapace di resistere.

La *mobilità*, la mobilità perfetta, assoluta, tale è la proprietà fondamentale dei corpi, e quella che interessa essenzialmente il geometra. È per la mobilità che viene a contatto con forze, che, a così esprimermi, si addentrano in esso. Che penseremmo di un corpo che resistesse ad ogni tentativo di movimento? Constateremmo che è un ostacolo; ma che c'è dietro questo ostacolo, al di là di questa superficie, contro cui il nostro impulso si esercita invano? Il corpo è più o meno pesante, è vuoto, è pieno? Noi lo ignoriamo. Al contrario il dubbio cessa, se il corpo cede liberamente, e noi entriamo in relazione con esso. Noi sentiamo il suo movimento variare a seconda dei nostri sforzi. Poichè, affrettiamoci a dirlo, la mobilità del corpo non è l'indiffe-

renza. Esso non obbedisce egualmente a tutti gli impulsi. Esso si muove più presto sotto un impulso più energico; e più lentamente sotto un impulso più debole. Nel tempo stesso noi osserviamo che i corpi sono lungi dal comportarsi allo stesso modo sotto lo stesso impulso. A parità di volume essi esigono per prendere lo stesso movimento, forze ineguali, secondo la loro natura. Un decimetro cubo di piombo esige sforzo maggiore di un decimetro cubo di legno o di vetro. Quando sono della stessa natura, richiedono forze proporzionate al loro volume.

Da questo fatto elementare sorgono due nozioni parallele, di massima importanza. La prima è quella di urti graduati, suscettibili di effetti corrispondenti alla loro intensità. Noi pensiamo a un impulso doppio, triplo, quadruplo d'un primo impulso, scelto come termine di paragone, o come unità. Se per esempio, noi adottiamo per unità di misura la forza che mantiene una certa molla tesa, la forza che conterrà ad un tempo due, tre o quattro molle simili costituirà una energia doppia, tripla o quadrupla della precedente; e noi sappiamo che queste forze produrranno effetti meccanici molto differenti. D'altra parte, ab-

biamo constatato che i corpi, secondo la loro natura, o il loro volume, richiedono forza ineguale per prendere lo stesso movimento. Questa proprieta, in virtù della quale un corpo esige un certo sforzo o un certo impulso per acquistare un movimento determinato, è ciò che si chiama la sua *massa*. Come conseguenza, due corpi, quali che siano la loro natura e le loro dimensioni, hanno la stessa massa, allorchè ricevono lo stesso movimento da uno stesso impulso.

Le masse dei corpi sono dunque l' espressione della loro mobilità relativa, o per parlare più esattamente, esse variano in ragione inversa della loro mobilità. Una massa doppia. o che esige uno sforzo doppio per prendere lo stesso movimento, possiede una mobilità minore della metà. A una massa grandissima corrisponde una debolissima mobilità. In ogni modo il concetto di massa è connesso a quello di mobilità; non c'è massa senza mobilità e *viceversa*. Giammai la massa, per quanto enorme sia, risveglia l'idea di resistenza. La resistenza non è mai nel corpo, essa, lo ripetiamo, è *fuori del corpo*. Se la massa esige uno sforzo, non è per resistere, è per cedere ad esso, è per acquistare un movimento ad esso corrispondente.

Ma non basta avere la nozione chiara della massa. Bisogna procedere oltre. Per i bisogni della dinamica, è necessario saper *computare* le masse, valutarle per mezzo di una tra esse, in una parola renderle chiaramente paragonabili, facendo astrazione da tutte le qualità fisiche o chimiche, che distinguono i corpi tra di loro. Per il geometra, i corpi non differiscono gli uni dagli altri che per la loro massa, per la loro capacità a ricevere il movimento.

Per giungere a questa classificazione speciale, bisogna da prima scartare l'idea un po' angusta di sforzo, che ricorda un'origine soggettiva, umana. In sostanza, la questione d'origine non interessa il matematico. Lo interessano solo l'intensità dell'azione, la sua direzione. Che l'impulso sia dato dalla mano dell'uomo, dalla trazione di un animale, dalla pressione dell'aria o del vapore, da un peso, da una calamita, ecc., il risultato è sempre lo stesso. Purchè l'intensità sia eguale, il corpo spinto prenderà un movimento identico. È così che l'idea generale di forza si sostituisce nella scienza all'idea particolare di sforzo, e che tutte le forze diventano assimilabili tra di loro, nonostante la loro origine, che non attira più l'attenzione.

Io parlo d'intensità. Ma un altro elemento è da considerare: la durata. Per definire l'azione di una forza, bisogna specificare il tempo, durante il quale si esplica. Poichè a misura che il tempo si prolunga, l'effetto prodotto, o il movimento comunicato è più considerevole. È dunque sottinteso, quando si paragonano le forze, che esse agiscano durante il medesimo tempo. Poco importa poi la grandezza intrinseca di questo tempo; basta che sia il medesimo in tutti gli esperimenti.

La comparazione delle masse risulta allora facile a concepire. Per rappresentarla si può immaginare una molla tesa, il cui grilletto produce un certo impulso poi sovrapporre due, tre molle simili, in maniera da produrre un impulso doppio, triplo. Si potrebbe immaginare anche l'esplosione, in un tubo, di una certa quantità di polvere; e poi l'esplosione d'una quantità doppia, tripla: la pressione del gas su d'uno stantuffo produrrebbe impulsi rappresentati da uno, due, tre. Con uno di questi mezzi, o con qualunque altro, corpi differenti saranno sottoposti a impulsi differenti, graduati in maniera, che tutti i corpi prendano lo stesso movimento. Le loro masse si troveranno proporzionali agli impulsi; i rap-

porti tra le masse eguaglieranno i rapporti tra gl' impulsi.

La comparazione delle masse è così ricondotta a quella delle forze. La massa di un corpo è oramai caratterizzata dalla grandezza della forza che gli comunica il movimento convenuto. Il suo valore, in cifre, dipende ad un tempo dall'unità di forza adottata e dall'ampiezza del movimento convenuto, preso anche per unità.

L'unità di forza può essere scelta arbitrariamente nella natura. Essa può essere lo sforzo necessario per spezzare un filo metallico, di una grossezza determinata; la pressione, sopra una superficie, di un gas o di un vapore portato a una certa temperatura; il grilletto di una molla costruito in condizioni definite; la forza sviluppata per mantener sollevato un corpo determinato.

Bisogna tener conto che certe unità, come l'ultima, sono soggette a variare secondo il luogo del globo, dove l'esperimento è fatto. Altre al contrario, come le tre prime, hanno da per tutto lo stesso valore intrinseco. Se si vuole comparare le masse misurate in un luogo con le masse misurate in un altro luogo, sarà indispensabile, all'uopo, di tener conto della variazione subita dall' unità di forza adottata.

Il movimento comune alle masse provate, o la grandezza della velocità comunicata, che si stabilisce di adottare come unità di lunghezza può egualmente essere scelta a volontà. Sarà il metro, la tesa, il piede o qualunque altra lunghezza prima fissata.

Stabilite queste unità, ne deriva l'unità di massa. L'esperienza la farà conoscere. Bisognerà ricercare, col sussidio di osservazioni speciali, quale sia il corpo che, sottomesso all'unità di forza durante l'unità di tempo, prende una velocità eguale all'unità di lunghezza.

I fisici hanno constatato che scegliendo per unità di forza la forza capace di mantener sollevato un decimetro cubo di acqua; per unità di tempo, il minuto secondo astronomico; e per unità di lunghezza, il metro o la quaranta milionesima parte del meridiano terrestre, il corpo cercato è rappresentato da un volume di acqua di poco inferiore a 10 decimetri cubi, cioè 9 litri 8088.... Questo numero è generalmente designato dalla lettera *g*. Ecco l'unità di massa. Le masse di tutti gli altri corpi saranno espresse da un certo numero di volte questa unità.

L'unità di forza essendo stata derivata dai

fenomeni del peso e variando quindi col punto del globo, le cifre delle masse determinate in un punto dovranno subire una correzione per essere paragonabili alle cifre delle masse determinate in un altro punto. Noi lasceremo da parte questa correzione, che considera unicamente l'unità di forza e ha per scopo di compensarne le ineguaglianze accidentali.

La grandezza d'una massa è dovunque identica. Qualora un corpo sia spinto dalla stessa forza, su un punto qualunque del globo, in Francia, in America, al polo, all'equatore, esso prenderà costantemente la stessa velocità. Se, per esempio, si fa uso di un grilletto di una molla (ciò che sopprime la correzione relativa all'unità di forza), questo grilletto, applicato successivamente in diversi punti, comunicherà sempre una velocità eguale. La comunicherebbe pure, se si potesse trasportare nelle profondità della terra o alla superficie di qualche altro pianeta. Questa velocità è invariabile. Essa origina da una legge suprema di natura. Essa esprime il rapporto eterno che esiste tra un impulso dato e un corpo determinato. Rapporto di cui la causa ci è ignota, come ci è ignota la ragione del rapporto che esiste tra una certa quantità di calore

e una certa quantità di movimento, tra una certa elevazione di temperatura e l'accrescimento di tensione di un gas. La ragione, il perchè di questi fatti ci sarà senza dubbio ignoto per sempre. Noi non possiamo che accertarli e registrarne i coefficienti, da cui sono espressi.

Ma ciò che è notevole e ciò che conferisce alla massa non un posto esclusivo — altri rapporti possono trovarsi nella identica condizione — ma un posto a dirittura eminente, è ch'essa è indipendente da tutte le circostanze suscettibili d'influire sullo stato del corpo. Non soltanto essa è indipendente dalla sua temperatura, dalla sua condizione elettrica, dalla sua coesione, dalla sua fluidità; ma essa è indipendente anche dal peso. L'esperimento ripetuto su diversi punti del globo mostra che la massa non è impressionata dalla latitudine, cioè dall'ineguaglianza d'azione del globo terrestre. E poichè l'azione del globo terrestre è un caso particolare dell'attrazione universale, ne segue che la massa è sottratta a questa condizione generale della materia. Si può concepire una modificazione d'intensità della gravità, la sua scomparsa finanche (che farebbe succedere all'ordine at-

tuale un ordine assolutamente differente, o piuttosto un *caos)*, ma ci è impossibile di concepire la scomparsa della massa. In questo immenso cataclisma, effetto d'un'alterazione della gravitazione universale, la massa rimarrebbe intatta. La stessa energia applicata allo stesso corpo — se si potesse preservarlo dalla disorganizzazione generale — continuerebbe ad imprimergli la stessa velocità. Tutti i fenomeni sarebbero modificati; solo il fenomeno della massa non si modificherebbe.

Quando si riflette alla persistenza, alla indistruttibilità della massa, si chiede, se non è quella la proprietà tanto ricercata dai filosofi dell'antichità, per definire la materia. Per non averla chiaramente compresa, quanti tentativi vani sono stati fatti! quante spiegazioni insufficienti sono state proposte! Per molto tempo si è detto: « La materia è ciò che cade sotto i sensi, » ma sono venuti i fisici e i chimici: essi hanno trovato una materia talmente tenue, che i nostri sensi non ne sono direttamente colpiti e che la sua presenza non ci è rivelata, se non da procedimenti di una precisione inaudita. Il passaggio d'un raggio elettrico può solo scoprirci la materia nel

vuoto straordinario di M. Crookes. Essi ci hanno fatto cenno anche di immagini, di luci, che sono vane apparenze, che indicano la materia là, dove non è in realtà; di maniera che questa testimonianza dei sensi, base e condizione della definizione, è colta in flagrante delitto d'errore. Si è voluto eliminare la questione attribuendo alla materia la nota di « estensione » e di « impenetrabilità ». Ma lo spazio è esteso e non è materiale. I gas sono materiali e non sono impenetrabili. I corpi solidi stessi si rivelano a noi come un complesso di molecole che possono avvicinarsi le une alle altre per una compressione sufficiente. Essi non sono dunque che in parte impenetrabili. Che significa una proprietà intesa così? Bisogna riferirla unicamente agli atomi? Ma sappiamo noi se essi stessi siano impenetrabili, e d'altronde come possiamo noi parlare della testimonianza dei sensi a proposito di residui, che per la loro estrema piccolezza, sfuggono precisamente a tutti i nostri sensi?

La scienza moderna ha introdotto un punto di vista nuovo. Oramai il gran tutto, il *cosmos* comprende due ordini d'oggetti. Gli uni rispondono più o meno all'idea istintiva, che noi abbiamo della natura; essi cadono, se non

sotto i nostri sensi, per lo meno sotto alcuni dei nostri mezzi scientifici di osservazione; essi sono sottomessi alla gravitazione universale, sono *pesanti*. Gli altri sfuggono ai mezzi diretti; essi si manifestano dagli effetti; essi sono gli agenti o i veicoli di queste grandi forze, che si disputano l'impero del mondo: calore, luce, elettricità, gravitazione, ecc. Ma, per quanto trasmettano la gravitazione non le obbediscono; essi sono *imponderabili* o appariscono tali. Non si accorda loro la qualità di materia riservata ai primi. Materia sarebbe dunque « tutto ciò che pesa ».

Ma chi non vede la differenza grande tra una proprietà generale, sia pure universale, come la gravità — senza la quale pertanto la materia si può ancora concepire — e una proprietà come la massa, che ci sembra veramente inerente alla materia, e che sembra esserne l'essenza stessa? Se la gravitazione cessasse di agire, noi non reputeremmo per questo che la materia abbia cessato d'esistere; essa sussisterebbe sempre ed esigerebbe per muoversi lo stesso grado di forza come prima. Essa conserverebbe la stessa massa. Senza spinger così lontano l'ipotesi, gli abitanti dei diversi pianeti, se esistono, e se coltivano

come noi la fisica matematica, devono formarsi la stessa nostra idea sulla legge dell'attrazione universale; eppure ne ricevono impressioni assai differenti. Il litro d'acqua pare due volte e un quarto più pesante, che a noi, sulla superficie di Giove: sei volte meno alla superficie della Luna; e, ammettendo la possibilità di una stazione nel Sole, ventisette volte più pesante sulla superficie di questo globo immenso. Tra l'abitante della Luna e quello del Sole, la differenza d'impressione in quanto al peso del litro d'acqua, sarebbe nel rapporto di 1 a 162. Tuttavia l'uno e l'altro impiegherebbero la stessa energia per comunicare a questo litro d'acqua lo stesso movimento. Il filosofo che raccogliesse queste impressioni così diverse, constaterebbe che il giudizio sulla massa è uniforme, assoluto, mentre il giudizio sugli effetti del peso è variabile e relativo [1]. Il concetto di peso non è

---

(1) Se un osservatore potesse essere situato tra la Terra e la Luna, al punto preciso in cui le attrazioni esercitate da questi due astri si equilibrano, gli oggetti che toccherebbe sarebbero per lui privi di peso, e tuttavia, se volesse applicar loro la sua energia, troverebbe che prendono lo stesso movimento o possiedono la stessa massa come sulla superficie della Terra.

dunque paragonabile a quello di massa, e non potrebbe allo stesso grado servir di base a una definizione della materia.

S'io dovessi definire la materia, la definirei: « La materia è tutto ciò che ha della massa, o tutto ciò che esige forza per acquistare moto ».

Le nozioni di forza e di massa sono correlative. Esse si chiariscono reciprocamente. Quale nozione avremmo noi dell'azione di una forza, dell'efficacia della nostra energia individuale, se non avessimo mai adoperata questa energia a spostare un corpo? Senza dubbio premendo più o meno fortemente su d'un ostacolo fisso, noi avremmo il sentimento di sforzi variati; ma noi non intravederemmo il risultato di questi sforzi, noi ignoreremmo gli effetti che possono produrre. Noi non ne abbiamo coscienza che il giorno, in cui spostiamo un corpo senza ostacoli; e spostando successivamente diversi corpi, noi ci rendiamo conto degl'ineguali sforzi, che esigono da noi. Nel tempo stesso, noi acquistiamo la nozione della massa, che è la maniera d'essere differente dei corpi, in rapporto a noi, in rapporto alla nostra capacità di muo-

verli. Le due nozioni sono inseparabili. Ciascuna di esse, separata, è incompleta. L'una richiama assolutamente l'altra, come l'azione implica la reazione, come il calore implica la temperatura, come l'acido in chimica implica la base.

Alcuni geometri e anche tra i più eminenti, criticano precisamente questa nozione della massa, perchè vincolata a quella della forza; essi vorrebbero una definizione diretta, indipendente. « Si chiama *massa* di un corpo, dice Poisson, la quantità di materia di cui è composto [1]. » Ma che bisogna intendere per « quantità di materia ? » Noi ci facciamo una giusta idea delle quantità *relative* di materia contenute nei corpi della stessa natura. Noi comprendiamo agevolmente che due litri d'acqua contengono due volte tanto la materia di un solo; e che cinque litri di mercurio contengono cinque volte la materia di un solo. In regola generale, le quantità contenute in corpi della medesima natura sono proporzionali ai loro volumi. Ma come rappresentare la comparazione, se i corpi sono di natura differente? Qual rapporto può esistere tra la

---

(1) *Traité de Mecanique*, Introduction.

quantità di materia contenuta in un decimetro cubo d'acqua e la quantità di materia contenuta in un decimetro cubo di mercurio, in un decimetro cubo di piombo o in un decimetro cubo di platino? Noi sappiamo una cosa sola: il litro d'acqua è più facile a smuovere del litro di mercurio, esso esige meno forza. Ora ciò è appunto la relazione stessa tra la forza e la massa. Bisogna quindi ritornare all'esperimento preliminare, che la stabilisce, vale a dire alla definizione precedente.

Per rimuovere la difficoltà, gli stessi geometri immaginano un « punto materiale », simile in tutti i corpi, e le quantità di materia sono definite dai numeri di questi punti fittizi, che i corpi, della specie più diversa, si suppone contengano. « Un punto materiale, dice Poisson, è un corpo infinitamente piccolo in tutte le sue dimensioni... Si può considerare un corpo di dimensioni finite, come un complesso di un'infinità di punti materiali, e la sua massa come la somma di tutte le loro masse infinitamente piccole. » — « La massa di un corpo, dice Laplace, è la somma dei suoi punti materiali.... La densità di un corpo dipende dal numero dei suoi punti ma-

teriali contenuti sotto un volume dato [1] ». Ma questo procedimento non infirma l'obiezione. Si è sempre in diritto di domandare: E perchè ci sono più punti di materia in un litro di mercurio, che non in un litro d'acqua? La domanda rimane senza risposta.

È lecito, dal punto di vista geometrico, immaginare un corpo di così piccole dimensioni, che la differenza delle traiettorie delle sue diverse parti possa essere trascurata.

Niente impedisce di chiamare un tale corpo « punto materiale ». Ma questa denominazione non deve varcare il dominio matematico, l'astratto. Essa è assolutamente fuori della realtà. Nel mondo fisico non vi sono che corpi finiti, e atomi, o elementi primordiali, di cui ignoriamo assolutamente le masse e le dimensioni. Noi non possiamo dire — almeno fino a questo momento — se l'elemento primordiale di un corpo è più o meno denso dell'elemento primordiale di un altro corpo. Noi sappiamo unicamente, avendolo direttamente constatato, che volumi molto ridotti di piombo e di platino esigono forze ineguali per pren-

(1) *Exposition du Système du Monde*, 6ª ed. pagine 173 e 175.

dere lo stesso movimento, e hanno, per conseguenza masse differenti [1].

Primieramente, allorchè fu costituita la meccanica razionale, vi fu una tendenza, di leggieri comprensibile, a restringere, il più che fosse possibile, tutto ciò che era stato ricavato dall'esperienza. Si voleva dare a questa scienza un aspetto sistematico e un carattere logico, paragonabili a quelli della geometria, dove i dati fisici sono in realtà poco numerosi e passano talvolta inavvertiti. Noi ne ritroviamo ancora oggi il carattere nella costituzione ipotetica, attribuita ai corpi solidi; ma ne derivano errori spiacevoli nel corso d'importanti teoremi, specialmente nella teoria dell'urto. Il progresso delle scienze naturali tende a modificare questa concezione e dispone la mente a considerare oramai la meccanica, anche nella sua parte razionale, come essenzialmente fondata sull'osservazione.

Il metodo deduttivo, sovrano nelle mate-

---

(1) La definizione della massa per il numero di *punti materiali* sarebbe legittima solo, se la chimica giungesse a dimostrare che la natura di tutti i corpi è identica e non esistono che raggruppamenti di un solo e medesimo atomo.

matiche pure, non è fecondo in meccanica, se non a condizione, che si applichi a elementi reali, forniti dal mondo esterno. Altrimenti esso porta a risultati, che concernono non il mondo quale è, ma quale a noi piace di immaginarlo. L'astrazione permessa deve estendersi unicamente alle qualità e alle circostanze estranee al problema dinamico propriamente detto. In un corpo isolato, noi possiamo e dobbiamo trascurare il colore, la temperatura, le affinità chimiche, perchè non hanno efficacia alcuna sul movimento. Ma noi calcoliamo l'inerzia o la mobilità, la massa, il modo di composizione delle forze. Se parecchi corpi sono presenti, noi consideriamo ancora altre proprietà trascurabili in un corpo isolato: la reazione, l'elasticità e, in caso di urto o strofinamento, la convertibilità del movimento in calore.

In conseguenza di ciò non dovrebbe essere lecito considerare masse astratte e corpi solidi di forma invariabile. Nè è meno illogico lo scartare la nozione diretta di forza col pretesto che essa è attinta dal sentimento del nostro sforzo individuale, vale a dire dall'osservazione della natura. Allora perchè non neghiamo anche i colori dello spettro solare, essendo il nostro occhio che li vede? Se si

definisce la forza « il prodotto della massa per la velocità » come vorrebbero taluni autori, se ne darebbe un'idea ben determinata all'uomo, che non avesse mai provato la sua forza muscolare? Quanto le matematiche pure aspirano ad elevarsi nella regione dell'astratto, altrettanto le scienze fisiche, di cui la meccanica è la prima, devono approfondire le loro radici nel concreto, se no possono mancar di base e ben tosto si esauriscono in speculazioni chimeriche.

---

## CAPITOLO II.

### Capacità dinamiche - La gravità

La proprietà della massa risplende di luce più vivida, quando la si osservi in corpi omogenei, di natura differente, aventi lo stesso volume. Le disuguaglianze di massa, osservate tra di loro, si riferiscono allora unicamente alle varietà di materia, di cui risultano composti. Colui che fa l'esperimento, con la molla, di cui abbiamo fatto uso, può constatare che se il decimetro cubo di acqua esige una forza eguale a uno per acquistare una velocità di 10 metri circa (vale a dire $9^{m}$, 8088 ...) nell'intervallo di un minuto secondo, il decimetro cubo di piombo esigerà una forza eguale a undici e mezzo, per acquistare la stessa velocità; il decimetro cubo di mercurio esigerà una forza eguale a tredici e mezzo; il decimetro cubo di platino esigerà ventuno e mezzo, ecc. Ogni corpo, secondo la sua natura, richiederà, a parità di volume, una forza differente.

Sarebbe temerità conchiudere, l'ho già detto, che questi decimetri cubi contengono più o meno materia. È possibile che il numero degli elementi indivisibili dell'acqua sia lo stesso del numero degli elementi indivisibili del piombo, del mercurio o del platino, e che ognuno di questi elementi abbia un eguale volume. È possibile anche che il numero degli elementi differisca, ma che il loro volume differisca in senso inverso, di maniera che il volume assoluto della *materia acqua*, contenuta in un decimetro cubo, sia eguale al volume assoluto della *materia piombo, mercurio* o *platino*. In queste condizioni, come si presumerebbe che la quantità di materia dell'uno sia superiore alla quantità di materia dell'altro? La sola affermazione logica è che la materia acqua non si comporta, di fronte alle forze, come la materia piombo, mercurio o platino. In altri termini, l'acqua, il piombo, il mercurio e i diversi corpi, a parità di volume, assorbono quantità differenti di forza o d'impulso per prendere lo stesso movimento.

È un fenomeno analogo a quello, che si rileva in fisica, trattandosi del riscaldamento dei corpi. Questi, sia che si paragonino a

parità di volume, sia che si paragonino a parità di peso, non assorbono la stessa quantità di colore per acquistare il medesimo grado di temperatura. Essi non hanno, secondo il termine comune, la stessa capacità calorifica. Nello stesso modo, riguardo al movimento, essi non hanno la stessa *capacità dinamica* [1].

È possibile escogitare, per le differenti specie dei corpi omogenei, una scala delle capacità dinamiche, simile a quella delle capacità calorifiche. Le cifre dei due quadri non hanno d'altra parte tra di loro nessuna corrispondenza, e non bisogna maravigliarsene; poichè noi non rileviamo un legame necessario tra le vibrazioni calorifiche o il fenomeno, come che sia, designato sotto questo nome, e la maggiore o minore facilità che si trova a spostare i corpi. Noi osserviamo anche le più grandi differenze di valore; poichè i corpi di debole capacità dinamica hanno spesso le più forti capacità calorifiche. Il piombo, paragonato all'acqua, a parità di volume, possiede una capacità dinamica di undici e mezzo, e una

(1) È il termine che ho proposto in una Memoria letta all'Accademia delle Scienze il 14 novembre 1887.

capacità calorifica appena superiore a un terzo. Il mercurio possiede una capacità dinamica di tredici e mezzo, e una capacità calorifica inferiore a un mezzo [1].

Gli esperimenti fatti in diversi punti del globo, e nello stesso punto, in direzioni diverse, provano che lo stesso impulso comunica sempre al medesimo corpo lo stesso movimento. Tuttavia il corpo si presenta ogni volta in condizioni differenti. La velocità da cui è animato, per effetto della rotazione del globo, diminuisce a misura che lo si allontana dall'equatore; inoltre essa si combina assai disugualmente con la velocità trasmessa dall'impulso, sia che questo sia diretto nel senso del meridiano o sia diretto in un senso perpendicolare. Queste circostanze non avendo alcuna influenza sulla velocità dovuta all'impulso, o sulla velocità osservata, si può perciò dire che « *la capacità dinamica dei corpi è costante* », o che essa è indipendente dal loro stato di quiete o di movimento.

Le capacità calorifiche seguono una legge ben differente. La capacità d'un corpo non

---

(1) In questi esempi e nei precedenti le cifre sono arrotondite.

è indipendente dal suo stato termico. Salvo per i gas determinati come perfetti, o molto lontani dal loro punto di liquefazione, la capacità calorifica si modifica, allorchè si opera in limiti di temperatura molto estesi e i corpi siano quasi sul punto di cambiare di stato, cioè dallo stato solido allo stato sia liquido, sia gasoso. In meccanica niente di simile ne giustificherebbe la modificazione della capacità dinamica. Non c'è « cambiamento di stato ». Le maggiori velocità rilevate non sembra che producano alcuna alterazione sulle condizioni fisiche e chimiche dei corpi. Essi si comportano, sotto questo punto di vista, come i gas perfetti, considerati sotto la legge del calore.

La mobilità dei corpi, a parità di volume, è in ragione inversa della loro capacità dinamica. Se la mobilità dell'acqua è presa come unità, la mobilità di un corpo qualsiasi sarà rappresentata dal rapporto di uno alla cifra della sua capacità dinamica. La scala così ottenuta presenta meno differenza, che quella delle capacità calorifiche della scala delle capacità dinamiche. Ma si tratta in quel caso di semplici approssimazioni aritmetiche.

La determinazione diretta delle masse, con

il sussidio di apparecchi meccanici, è in teoria, semplicissima. Ma non lascia, nella pratica, di imbattersi in gravi difficoltà. Specialmente quando si tratta di corpi voluminosi, il procedimento diventa quasi inapplicabile.

Rigorosamente parlando, per determinare le capacità dinamiche, si può procedere su volumi molto ridotti, giacchè i risultati della comparazione sono indipendenti dal volume assoluto. Una volta che queste capacità sono fissate, le masse dei corpi studiati si deducono moltiplicando la cifra della capacità per il volume del corpo. Ma questo metodo non conviene se non a corpi perfettamente omogenei. La menoma traccia di eterogeneità toglie ogni esattezza. Così nella maggior parte dei casi, l'uso di apparecchi, del genere di quelli a cui ho fatto cenno, non offre vantaggi sufficienti.

Fortunatamente la natura fornisce un mezzo tanto spiccio, quanto inaspettato per rimuovere l'ostacolo. I fisici hanno constatato che tutti i corpi, di qualsiasi specie, dalla più tenue lanugine alla massa di piombo o di platino, cadono nel vuoto con eguale rapidità. Se si precipitano insieme dalla stessa altezza, essi arrivano in fondo nel medesimo

intervallo di tempo. Questi corpi sono dunque tutti spinti, durante la loro discesa, da forze esattamente proporzionali alle loro masse rispettive; poichè, secondo la definizione, le masse sono proporzionali alle forze, che loro imprimono lo stesso movimento nel medesimo tempo. Ora qui le forze applicate ai corpi risultano dall'attrazione terrestre, cioè a dire costituiscono, per ciascuno di essi, il loro proprio peso. Il peso dei corpi è dunque rigorosamente proporzionale alla massa e può così servir loro di misura. In altri termini, invece di smuovere i corpi, per valutarne la massa, basterà *pesarli*.

Questo sperimento è conosciuto da un pezzo. Ci è divenuto anzi così familiare, che noi finiamo quasi col confondere la massa col peso. Queste due proprietà ci sembrano indissolubilmente legate l'una all'altra. Tuttavia, se ben si considera, una simile coincidenza è davvero l'avvenimento più straordinario e meno preveduto, che potesse essere rivelato dallo studio della natura. Quale rapporto, in fatti, si può immaginar *a priori* tra la massa e il peso? La massa è il maggiore o minore sforzo che richiede un corpo per un eguale spostamento. Il peso è la mag-

giore o minore attrazione esercitata su di esso dal globo terrestre. Quale legame esiste tra questi due ordini di fatti? Chi potrebbe impedire che un corpo, il quale con tutta facilità si muove, fosse nel medesimo tempo potentemente attratto? Non vediamo noi un'opposizione di simile genere manifestarsi in una infinità di circostanze? Per esempio, i corpi più pesanti non sono in generale più facilmente riscaldabili? E il ferro più leggero del platino, non è forse assai più di questo attirato da una calamita? La forza di coesione, l'affinità chimica sono esse in ragione delle masse? Non variano esse oltremodo secondo la natura delle sostanze? Fin qui nessuna serie di fenomeni s'è mostrata in esatta concordanza con le masse e con le masse sole. La proporzionalità precisa, matematica, esclusiva è stata osservata solo nel fenomeno della gravitazione universale.

La legge della gravitazione, formulata da Newton, poggia su due punti: la proporzionalità della forza alle masse, e il suo decrescere in ragione inversa del quadrato della distanza. Questa ultima condizione poteva congetturarsi; poichè difficilmente le forze irradianti propagherebbero la loro azione in

un altro modo. Ma il rapporto diretto delle forze alle masse, niente poteva farlo presumere. È stata necessaria tutta la familiarità che ne abbiamo acquistata e con la conoscenza delle leggi astronomiche, e con l'esperienza quotidiana dei corpi, perchè noi lo notassimo senza maraviglia e senza ammirazione di sorta.

Più si medita sugli effetti della gravitazione universale, meno si spiega la sua proporzionalità con le masse. Se la gravitazione derivasse dalla materia stessa, se ne fosse, a così dire, un'emanazione diretta, si comprenderebbe fino a un certo punto che essa fosse proporzionata alla massa. Ma allora, essa dovrebbe, a parer mio, affievolirsi a poco a poco col tempo, come le radiazioni calorifiche e luminose, che si spengono progressivamente. Nei corpi di piccole dimensioni dovrebbe anzi essere dileguata. Ora gli astronomi non constatano, da tempi storici, nessuna diminuzione della gravitazione negli astri di volume ridotto, come la Luna, le cui radiazioni calorifiche sono divenute pressochè nulle. Se, al contrario, la gravitazione risulta da qualche azione estranea ai corpi, che li spingesse gli uni verso gli altri

come in un fluido, nel quale si trovassero immersi, essa dovrebbe essere sensibilmente proporzionale alla superficie dei corpi, o al loro volume, se si supponga il fluido tanto sottile, da penetrare in tutta la profondità. Ma non sarebbe, in questa ipotesi, in rapporto con la massa. In ogni modo, il mistero della proporzionalità rimane inesplicato.

I pesi dei corpi, alla superficie del globo, essendo proporzionali alle loro masse, e il peso variando da un luogo a un altro, mentre le masse non variano, ne risulta che, secondo la latitudine, le medesime masse sono spinte da forze differenti. Per conseguenza le velocità acquistate nel medesimo intervallo di tempo, cadendo al suolo, cambiano con la latitudine. È col sussidio delle modificazioni di questa velocità che i fisici misurano con la maggiore esattezza le variazioni del peso. Queste potrebbero del resto essere constatate direttamente dal grado di tensione di una molla sufficientemente sensibile, a cui rimanesse sospeso un peso.

Nel medesimo modo come abbiamo paragonato le masse dei corpi omogenei, sotto l'unità di volume, e ne abbiamo dedotto le

capacità dinamiche; così si paragonano i pesi, sotto l'unità di volume, e se ne deduce la *densità*. Questo termine, nel linguaggio ordinario, risveglia l'idea di una materia più o meno pressa, più o meno compatta. Bisogna guardarsi da simili immagini, che falsano il criterio delle cose. L'ineguaglianza di capacità dinamica indica solamente una ineguaglianza nella mobilità, ma non implica nulla circa la quantità assoluta di materia. L'ineguaglianza di densità non implica nemmeno una ineguaglianza di compattezza; poichè due corpi assai disugualmente densi possono opporre la medesima resistenza alla compressione. L'ineguaglianza di densità indica solamente una ineguaglianza nell'attrazione esercitata dal globo terrestre.

Se si prende per unità di densità il medesimo corpo, la cui massa fosse presa per unità di massa, allora le cifre che rappresentano le densità dei diversi corpi, saranno identiche alle cifre che rappresentano le loro capacità dinamiche, poichè i pesi sono proporzionali alle masse. Se, per esempio, il decimetro cubo di acqua fosse scelto come termine di paragone tanto per i pesi, quanto per le masse, le capacità e le densità avrebbero gli stessi valori

numerici. Ma non è stato possibile di procedere così. La massa che, sotto l'azione di una forza eguale a un chilogramma, acquista, al termine dell'unità di tempo, una velocità eguale a un metro, non è la massa di un decimetro cubo di acqua; ma sibbene la massa di dieci decimetri cubi di acqua. In altri termini, un corpo cadendo liberamente nel vuoto acquista una velocità circa dieci volte maggiore, perchè la sua massa possa servire di unità, quando il suo proprio peso è stato scelto come unità di peso. Questa doppia scelta non sarebbe permessa, se non quando l'unità di lunghezza adottata fosse quasi dieci volte più grande. Bisognerebbe dunque per raggiungere lo scopo, prendere come unità di lunghezza, non il metro, ma la velocità acquistata da un corpo che cade liberamente nel vuoto durante un minuto secondo. Il metro così fissato sarebbe eguale a 9,8088... volte il metro nostro e il nuovo decimetro sostituirebbe questo quasi esattamente.

I vantaggi, che una simile combinazione avrebbe presentati, risaltano agli occhi. Il decimetro cubo d'acqua avrebbe fornito a un tempo l'unità di peso e l'unità di massa, mentre che la sua materia stessa sarebbe servita

come termine di paragone alle densità e alle capacità dinamiche. In tutte le formole si sarebbe evitata la ripetizione fastidiosa del numero *g*, ossia 9,8088... Infine se, a un dato momento, si fosse voluto verificare l'unità di lunghezza, era più facile di fare un esperimento col pendolo a Parigi, anzichè misurare di nuovo il meridiano terrestre. Ma sarebbe ozioso d'insistervi: oggi la questione è tolta definitivamente con l'adozione del metro geografico francese, che tende a diventare l'unità di lunghezza delle nazioni civili.

Riassumendo le unità prevalse sono, con il metro:

Il minuto secondo astronomico, o 86400.ª parte del giorno siderale;

Il chilogramma, o peso del litro d'acqua servendo insieme come unità di peso e come unità di forza;

E la massa di *g* decimetri cubi di acqua.

Questa ultima unità non era arbitraria o fissata *a priori*, come le altre; ma è stata imposta dalla condizione — risultante da una legge naturale — che, sottoposta a una forza di 1 chilogramma, durante un minuto secondo, essa acquista una velocità eguale a un metro.

---

## CAPITOLO III.

### Del problema dinamico.

Ogni problema dinamico, può ridursi a questi termini semplici:

« L'esperienza avendo insegnato, che una forza di 1 chilogramma comunica a una massa di $g$ decimetri cubi di acqua, in capo a un minuto secondo, una velocità eguale a un metro, quale velocità comunicherà una forza di un numero qualsiasi di chilogrammi, che agiscano durante un tempo qualsiasi su d'una massa di un numero qualsiasi di decimetri cubi d'acqua? ».

Questo problema potrà complicarsi, e si complica di fatto, se si considera una forza variabile in grandezza e in direzione, oppure parecchie forze, che agiscono insieme su di un corpo, o infine forze, che agiscono su parecchi corpi congiunti tra di loro in diverse maniere. Ma in sostanza la questione rimane immutata.

Sia per ridurre il problema complesso a termini semplici, sia per risolvere il problema semplice stesso, è necessario di ricorrere all'esperienza. Essa sola può farci conoscere: 1. come una forza costante unica agisce su di un corpo, quando l'intensità, la massa e il tempo cessano di essere eguali all'unità; 2. come parecchie forze combinano la loro azione su d'un corpo o su d'un sistema di corpi.

L'esperienza ha dunque, oltre il fatto iniziale che lega tra di loro le diverse unità, da determinare alcune leggi, grazie a cui da noi si possa passare dal fatto iniziale al problema semplice formulato più sopra, del pari che ridurre il problema composto a termini semplici.

Il problema dinamico, nella sua generalità, consiste, si vede chiaro, nel passare dalla conoscenza delle forze e delle masse a quella del movimento. Esso ha ricevuto il nome di *diretto*. Ma ha il suo *inverso*, che è questo: « Essendo noti, le masse e i loro movimenti, dedurre le forze ». Le medesime leggi sperimentali serviranno a risolvere quest'ultimo.

La questione inversa si pone nello studio dei fenomeni dell'Universo. Allorchè noi vol-

giamo gli sguardi intorno, scorgiamo della materia in movimento; noi ignoriamo spesso le forze che la muovono. Quando Newton procedè alla scoperta della gravitazione universale, aveva dinanzi a sè i movimenti dei pianeti e dei loro satelliti, e da questi movimenti egli deduceva la forza. Galileo, quando studiava la caduta dei corpi gravi; Cavendish, quando voleva misurare l'attrazione della terra, avevano sotto i loro occhi alcuni movimenti.

Nella sfera delle arti e dell'industria, noi dobbiamo risolvere comunemente la questione « diretta ». Noi disponiamo di forze, di caduta d'acqua, di vapore, di elettricità, ecc., e noi calcoliamo i movimenti che potremmo ottenere per mezzo del loro impiego. Il problema diretto è dunque, a così dire, nel dominio della pratica, e il problema inverso nel dominio della teoria... Va da sè che questa regola non è senza eccezione.

Le due questioni offrono tra di loro una differenza fondamentale, la cui importanza filosofica non potrebbe sfuggirci.

Il problema diretto è essenzialmente *determinato*. Esso ammette una sola soluzione. Data la massa di un corpo e del pari le forze

che agiscono su di esso, il movimento risulta di necessità. Sarebbe inescogitabile che l'effetto da prodursi rimanesse indefinito e che la stessa causa, nelle stesse condizioni, si espiicasse in molteplici modi.

Il secondo problema al contrario è *indeterminato*. Può ammettere un gran numero e anzi un'infinità di soluzioni. In principio esso non riesce per lo più a fatti definiti, ma a cause più o meno ipotetiche. La soluzione è *soggettiva* anzichè *obiettiva*. Noi assistiamo a movimenti senza poterne assegnare le vere cause. Allora noi immaginiamo delle forze analoghe ai nostri sforzi individuali, e che potrebbero produrre questi stessi movimenti. E noi consideriamo il problema risoluto, quando siamo giunti a determinare queste forze supposte, in comparazione con l'unità che ci è famiiare, e a fissarne la direzione. Per ciò che concerne la gravitazione, di cui la vera natura ci è ascosa, noi ce la rappresentiamo volentieri come uno sforzo, che agisca per attrarre, o respingere gli astri gli uni verso gli altri. La nostra mente, in mancanza di una conoscenza più perfetta, prova una viva sodisfazione a esprimere il fenomeno sotto questa forma semplice, che ci pare convenire

meglio con i fatti. Tale fu il sentimento dei contemporanei di Newton, quando appresero la sua memorabile scoperta. Quantunque questo grand'uomo avesse avuto la cura di avvertire che egli non intendeva emettere un giudizio sulla causa vera della gravità, nessuno esitò a considerare la sua formola matematica, come l'espressione della più maravigliosa legge dell' Universo.

Il problema inverso ha dunque comunemente per scopo, non di assegnare le forze vere, ma di valutare le forze supposte o teoriche che potrebbero generare i movimenti studiati. Sotto questo punto di vista già la soluzione è indeterminata, poichè non è formulata in una realtà precisa. Ma è indeterminata, ancora di più, sotto un altro aspetto.

Infatti una quantità di sistemi di forze possono rispondere alle domande. Sicuramente due forze differenti non possono separatamente incitare un corpo in maniera identica. Ma parecchie forze possono combinarsi su di un corpo, e a più forte ragione su d'un aggregato di corpi legati tra di loro, in maniera da produrre lo stesso effetto che produrrebbero altre forze, differenti dalle prime, che a loro volta vengano a combinarsi. Per

esempio, su un punto di materia parecchie forze hanno una risultante, e questa è suscettibile di produrre lo stesso effetto della composizione delle forze date. Intorno a questa risultante, si possono concepire tanti sistemi di componenti, quanti si vogliano, tutti egualmente capaci di imprimere il medesimo movimento.

Si sarebbe dunque condannati a una perpetua incertezza, se non si giungesse a circoscrivere le ricerche, grazie a quella disposizione del nostro spirito, che ci fa seguire, in ogni evenienza, la soluzione più semplice possibile. Là dove una sola forza potrebbe bastare, noi non ne immaginiamo volentieri due; là dove due forze basterebbero, non ne immaginiamo tre. Pertanto, in presenza di un movimento, noi cominciamo sempre con l'esaminare, se una o più forze sono già imposte dalla natura della questione, se la loro esistenza è certa, fatta astrazione dalla nostra propria maniera di vedere. Ciò constatato, noi cerchiamo di scoprire il più semplice sistema di forze che, combinato con le forze imposte, basterebbe a produrre il movimento studiato. Così, quando un proiettile si muove nel vuoto, una forza è imposta: il peso. Quando

si muove nell'atmosfera, due forze sono imposte: il peso e la resistenza dell'aria. Se queste due forze non bastassero, con la velocità iniziale, a spiegare il movimento, noi dovremmo ricercare o immaginare una terza forza che, combinata con le precedenti, causerebbe lo spostamento effettivo.

In tesi generale, qualora si tratti di un corpo o di un aggregato di corpi, noi adottiamo sempre il sistema di forze più semplice, il quale, combinato con quelle di cui conosciamo prima l'esistenza, basta a produrre il movimento osservato. Il problema si trova così ricondotto alla sua determinazione, ma questa è una determinazione relativa. Essa può non rispondere alla realtà dei fatti. Se noi ignorassimo, supponiamo, la presenza di due forze diverse sul mobile che scorre nell'aria, noi saremmo indotti a spiegare il suo movimento con una forza sola, la cui espressione, d'altra parte assai complicata, non sarebbe in armonia con gli elementi naturali del fenomeno. Vi è dunque, per ripetere la parola, molta parte di *subiettivo* nella soluzione del problema, che cerca di risalire dai movimenti alle loro cause. Mentre ciò non si verifica nel problema, che discende dalle cause ai loro effetti.

Quando noi consideriamo la questione dinamica sotto la sua forma più elementare, cioè di « determinare la velocità che una forza costante in grandezza e in direzione imprime a una massa data, dopo un certo tempo », noi siamo tratti a credere che questa questione possa risolversi direttamente, per mezzo della relazione conosciuta tra le unità di tempo, di forza, di massa e di lunghezza, con semplici regole di proporzione. Ma ciò sarebbe un grave errore, che riceve spiegazione soltanto dalla nostra lunga esperienza delle verità fisiche. Come, in fatti, troveremmo noi nelle matematiche, vale a dire in noi stessi, le leggi, secondo cui le forze fanno muovere la materia? Dal fatto che una forza comunica una certa velocità a una massa dopo un tempo dato, possiamo prestabilire ciò che farà una forza doppia? o ciò che farà la stessa forza su una massa doppia? o ciò che farà la stessa forza, sulla stessa massa, dopo un tempo doppio? Con qual diritto affermeremmo noi che la velocità sarà raddoppiata nel primo e terzo caso, e ridotta della metà nel secondo? Senza dubbio ci pare che così debba essere. Ma la nostra convinzione non ha il carattere di necessità logica; essa risulta esclusiva-

mente da una esperienza così antica, che noi non ne intravediamo più l'origine, ed è appunto ciò che produce la nostra illusione.

In realtà, la meccanica si fonda interamente su d'un certo numero di verità di fatto stabilite con l'aiuto dell'osservazione diretta della natura. Queste verità sole o *Leggi generali del movimento* permettono di risolvere i problemi dinamici, dalla più semplice relazione tra la forza e la massa, fino alle leggi maestose dell'astronomia e a quelle così complesse e astruse della fisica terrestre. Il calcolo si propone di aiutare a mettere in rilievo le conseguenze che queste leggi celano, e di costituire così una catena sistematica, il cui primo anello sfugge alla ragione pura.

---

## CAPITOLO IV.

### LE LEGGI GENERALI DEL MOVIMENTO.

Le leggi generali del movimento sono presentemente in numero di tre. Appare oramai necessario di aggiungerne una quarta, senza la quale i fenomeni di contatto tra i corpi (fregamento, urto, alterazione, ecc.) avrebbero una spiegazione manchevole, spesso anche del tutto erronea.

La prima, la così detta: *Legge d'eguaglianza tra l'azione e la reazione*, è dovuta a Newton [1].

Essa dimostra che in natura le azioni sono sempre eguali due a due e in verso opposto. Non c'è azione, piccola o grande, che non abbia il suo contrapposto. Se si potessero riunire con un'asta rigida i due corpi tra i quali s'esercitano due azioni reciproche,

---

(1) Io presento queste leggi, non nell'ordine cronologico, ma nell'ordine che mi pare il più logico.

queste si neutralizzerebbero e i due corpi, in mancanza di ogni altra causa, sarebbero ridotti all'immobilità.

Newton ha verificato l'esattezza di questo principio, rilevando il perfetto accordo delle sue conseguenze con tutti i movimenti dei corpi celesti conosciuti al suo tempo. I suoi successori, nelle loro innumerevoli applicazioni del calcolo nell'astronomia, non hanno mai riscontrato la menoma deviazione. I vari corpi del nostro sistema, dal sole fino all'ultimo asteroide, s'influiscono due a due, con eguale energia e in direzioni opposte. Le recenti osservazioni fatte sul movimento delle stelle duplici o triple portano a credere che la medesima legge presieda all'evoluzioni di questi astri lontani.

Sul nostro pianeta fatti molteplici, fenomeni d'ogni specie mettono ad ogni istante in evidenza il principio. Così se nell'interno di un corpo le azioni, che si sviluppano da molecola a molecola non si facessero continuamente equilibrio, questo corpo non resterebbe immobile su un piano orizzontale, o non manterrebbe la verticale all'estremità di un filo di sospensione. Ma si sposterebbe o si inclinerebbe nel senso della risultante ge-

nerale delle azioni interne. Una calamita, legata a un pezzo di ferro dolce attirerebbe questo o sarebbe da questo attratta. Il liquido contenuto in un vaso messo a livello, andrebbe da un lato o pure traboccherebbe. Le reazioni chimiche, dovute alle affinità reciproche, farebbero rovesciare il recipiente, nel quale esse si sviluppano. In una parola, tutti i fenomi sarebbero più o meno turbati, poichè tutti implicano la reciprocità perfetta delle azioni operanti.

Questa reciprocità ci è qualche volta velata dagli intermedi, a traverso cui le azioni si trasmettono. Quando noi vogliamo esercitare una pressione su d'un corpo con l'aiuto di molle, di fluidi o di oggetti più o meno alterabili, noi non osserviamo in principio una eguaglianza esatta tra lo sforzo al punto di partenza e lo sforzo al punto di arrivo. Sembra che l'azione iniziale si disperga e si perda in parte nel meccanismo di trasmissione. Ma se noi aspettiamo che questo abbia preso un andamento invariabile, che molle, carrucole, corregge, ecc., sufficientemente tese, formino un sistema geometrico, noi constatiamo nell'ultimo corpo premuto o nell'ostacolo contro cui premiamo una reazione esattamente eguale

allo sforzo iniziale. In ogni punto dell'apparecchio allora regna la reciprocità e la porzione di destra tira o spinge quella di sinistra, con la stessa forza che questa tira o spinge quella.

È facile riconoscere in questa legge il famoso adagio: « In natura niente si crea ». Per ciò che riguarda il moto quest'adagio non è punto un assioma razionale. Esso esprime una semplice verità sperimentale, della quale non ci saremmo mai convinti senza le ricerche, a cui son assorti i fisici. La meccanica contiene altre verità, sulle quali si è finito egualmente per illudersi e di cui si pone la sorgente nella ragione, invece di vederla nel mondo esterno.

La seconda legge, scoperta da Keplero, ma che non ebbe la sua formola definitiva, che più tardi porta — peraltro assai impropriamente — il nome di *Legge di inerzia* (1). Questo termine merita una spiegazione.

---

(1) Questa legge viene per lo più attribuita a Galileo. Lagrange ammette ch'egli veramente ne sia lo scopritore nella sua *Mécanique analytique* (p. 208 3. ed.), e G. Bertrand ne conviene egualmente in un articolo del *Journal des Savants* (marzo 1896), ch'egli dedicò al mio libro. Nonostante queste due grandi autorità, io credo

In fatto, la materia non è punto inerte. Si trova, non c'è chi lo ignori, in perpetua attività. Soggetta alla gravitazione universale, che ne mantiene tutte le parti in una stretta dipendenza, essa è inoltre, il centro dei fenomeni più svariati. Attrazioni molecolari, affinità chimiche, azioni calorifiche, elettriche, ecc., l'animano, o la governano, e non la lasciano rimanere inerte un solo istante. Quando la si definisce tale è per una pura astrazione: si suppongono i corpi collocati in condizioni che neutralizzano le azioni naturali, o le ren-

---

dover mantenere la mia opinione. Keplero ha enunciato nel libro IV (2. parte pag. 510) dei suoi *Epitomes astronomiae copernicanae* considerazioni, le quali, a mio giudizio, troncano la questione della precedenza in suo favore: « Sebbene un globo celeste, egli dice, non sia così pesante, come dicesi esser pesante una pietra su la terra, nè così leggero come è per noi il fuoco, questo ha frattanto, in ragione della sua materia, una *incapacità* naturale per passare da un luogo ad un altro; desso ha un'inerzia naturale o quiete, in virtù della quale resta immobile in ogni punto, dove sia posto isolato. In conseguenza, perchè esso muti di luogo e si sottragga alla sua immobilità, occorre qualche forza, che sia differente dalla sua materia e, quasi direi, del corpo stesso, il quale trionfi della sua inerzia naturale. Il testo latino è il seguente:

« *Et si globus aliquis coelestis non est sic gravis, ut*

dono poco valutabili di fronte agli effetti meccanici, che ci proponiamo di produrre o misurare su di essi. Si immagina, per esempio, che essi scorrano su d'una superficie orizzontale perfettamente levigata, dove il peso e l'attrito saranno appena risentiti e dove l'attrazione dei corpi vicini sarà assolutamente trascurabile.

Non è dunque nel senso di inattivo che bisogna intendere il vocabolo *inerte*. Il vero significato è questo: « Quando un corpo possiede una certa velocità, la conserva senza

---

*aliquod in Terra saxum grave dicitur, nec sic levis ut penes nos ignis: habet tamen ratione suae materiae naturalem adunamian transeundi de loco in locum, habet naturalem inertiam seu quietem, qua quiescit in omni loco, ubi solitarius collocatur. Inde vero ex situ et quiete sua ut emoveatur opus est illi potentia aliqua, quae sit amplius quippiam, quam sua materia et corpus nudum, quaeque inertiam hanc eius naturalem vincat* ».

Senza dubbio, Galileo ha reso il concetto con più precisione, ma egli ha dovuto attingere a Keplero, il quale era maggiore per età di lui di molto e corrispondeva spesso con lui circa gli argomenti dei suoi lavori. Augusto Comte, meno geometra di Lagrange, ma più filosofo e storico, non esita punto, nell'analisi stessa che egli fa dell'opera di Lagrange ad attribuire, in due punti, la legge d'inerzia a Keplero (*Cours de philosophie positive, t. I, XVIII lezione*).

alterazione indefinitamente, se nessuna influenza esterna agisce su di esso ». Intesa così, alla legge d'inerzia, sarebbe più propria la denominazione di *Legge della conservazione del movimento*.

Pare evidente, secondo la legge di Newton, che un corpo non può per sè stesso, aumentare la sua velocità attuale o sottrarsi dalla quiete. Poichè, tutte le azioni che si esercitano in esso, neutralizzandosi due a due, non generano nessuna risultante e per conseguenza non possono accelerare il movimento, nè rompere l'immobilità. Ma non è così evidente che il corpo non possa rallentarsi gradatamente. Perchè non perderebbe la sua velocità per una specie di irradiazione, come perde il suo calore e la sua luce? « La natura di questa singolare modificazione, dice Laplace, in virtù della quale un corpo è trasportato da un luogo a un altro, è e sarà sempre ignota ». Noi non possiamo dunque fissare *a priori* le condizioni della conservazione della velocità. Se lo spazio indefinito fosse riempito di un mezzo suscettibile di opporre resistenza e se non sapessimo *fare il vuoto* relativamente a questo mezzo, come lo facciamo per i gas ponderabili, noi ve-

dremmo il movimento dei corpi rallentarsi più o meno presto, senza che potessimo supporre la causa di questa alterazione. La legge d'inerzia, in simile caso, non sarebbe mai stata formolata.

Una tale ipotesi non è molto strana, poichè presentemente i fisici e gli astronomi si domandano, se l'etere, o il mezzo qualsisia, a cui sono per ora attribuiti i fenomeni di calore, di luce e di elettricità, non sconvolgerà a lungo andare il movimento degli astri. Si immagini questo mezzo più denso, e la legge d'inerzia cesserebbe d'essere esatta nel campo delle nostre osservazioni. Se noi la riteniamo per certa, è dunque in virtù di circostanze, che l'esperienza sola doveva mettere in evidenza. Si comprende quindi, come siano vani i tentativi fatti, in diversi tempi per stabilire questa legge con il raziocinio. Essi si riepilogano tutti nel dichiarare la materia *incapace* di mutare il suo proprio stato. Come se, ad ogni momento, e sotto una molteplicità di altri rapporti, questa materia non ci facesse maravigliare per le molte sue trasformazioni!

Le stesse cause che assicurano la conservazione della velocità in grandezza, l'assicu-

rano parimente in direzione. Se il corpo si moveva in linea retta, nel momento in cui le forze esterne l'hanno abbandonato, continuerà a muoversi, seguendo la stessa linea retta. Se percorreva una curva, se ne dipartirà seguendo la tangente, al momento preciso in cui le forze cessano, e si allontanerà indefinitamente in quella direzione.

Io ricordavo or ora l'adagio: « Niente si crea ». Ma non basta; vi si aggiunge di solito: « Niente si perde ». Se la legge di Newton rispondeva alla prima parte dell'adagio, la legge di Keplero risponde, è evidente, alla seconda. Le due leggi accoppiate esprimono questa gran verità che il movimento è indistruttibile, o per lo meno che non c'è dato storicamente di constatarne l'annientamento. Da una parte, non può aumentare, poichè ogni azione motrice è accompagnata, nell'Universo, da una azione eguale in verso contrario. D'altra parte, non può diminuire, poichè la legge d'inerzia ce lo mostra, conservandosi in ogni corpo per una durata reputata indefinita, salvo l'intervento di un'azione estranea, la quale avrebbe il suo inevitabile contrapposto. Io ritornerò del resto su questo principio, che merita una dimostrazione più ampia.

I geometri adoperano spesso l'espressione « *forza d'inerzia* ». Le due parole parrebbero contradittorie; poichè ciò ch'è inerte o inattivo non potrebbe produrre forza. Sarebbe più esatto dire: *resistenza d'inerzia*. Inoltre conviene chiarire ii significato attribuito qui al vocabolo *resistenza*. Quando noi spingiamo avanti un corpo totalmente libero, esso non ci oppone una resistenza simile a quella d'un peso, che noi volessimo sollevare; perchè un minore sforzo smuove il corpo, laddove il peso non è sollevato che da uno sforzo superiore al peso stesso. La resistenza o piuttosto la reazione del corpo supposto libero si proporziona alla nostra prapria azione; ma invece di distruggere quella, come farebbe un peso o l'attrito o qualunque altro ostacolo, essa la lascia passare integralmente nel corpo, o essa si accumula sotto la forma di massa in movimento. Ciò che noi denominiamo « forza d'inerzia » o « resistenza d'inerzia » è dunque il procedimento impiegato dalla natura per trasmettere il moto da un corpo ad un altro. Così intesa l'espressione « forza d'inerzia » ha il vantaggio di esprimere in modo conciso il fenomeno della trasmissione dell'impulso. Durante questo fenomeno il corpo, che

dà l'impulso, si trova nella medesima condizione, come se fosse respinto da una forza eguale alla reazione del corpo, che lo riceve. Ma in tutto ciò non v'ha nulla di contrario alla legge d'inerzia, o alla assoluta mobilità della materia, come potrebbe esser tentato a credere chi prendesse alla lettera questi termini metaforici [1].

La terza legge, scoperta da Galileo, è quella dell'*indipendenza dei movimenti*. Essa può formolarsi così: « I movimenti particolari, da cui diversi corpi sono animati gli uni in rapporto agli altri, non sono turbati, se anche si imprime a tutti questi corpi un movimento comune, consistente nel descrivere, nel medesimo tempo, delle rette eguali e parallele ». Reciprocamente, se il movimento comune esisteva già, e si sopprime, i movimenti particolari non sono punto alterati e i

(1) È nel medesimo senso che si parla della « forza centrifuga ». Ciò non vuol dire già che il corpo sviluppa una forza determinata per allontanarsi dal centro, ma semplicemente che bisogna applicargliene una per ricondurvelo. Abbandonato a sè stesso il corpo continuerebbe il suo movimento, seguendo la tangente in virtù della legge d'inerzia. La « forza centrifuga è dunque la reazione che provoca lo sforzo esercitato verso il centro.

movimenti particolari rimangono in uno stato di mutua indipendenza.

Gli esperimenti di questa legge sono comuni e gli esempi citati sono classici. Quando una nave segue un corso regolare sul mare perfettamente tranquillo, l'osservatore che sta su questa nave, partecipando per conseguenza al movimento comune, riconosce che tutti i movimenti particolari si compiono, come se la nave ed egli stesso stessero in riposo.

Le perturbazioni occasionali sono dovute all'agitazione del mare, che non si fa sentire in egual modo su tutti i punti della nave e che per conseguenza interrompe il movimento comune.

Sul treno, se la via è molto piana e si svolge in linea retta, i viaggiatori, i cui movimenti particolari non sono disturbati dal movimento comune, non hanno il sentimento della velocità, se già non fissino gli oggetti della strada. Chi non ha notato le frequenti illusioni a cui andiamo soggetti?

Ora ci crediamo in moto, ed è il treno vicino al nostro, che si muove; ora crediamo vederlo partire e siamo noi stessi che ci moviamo.

Nessumo ignora, quali enormi distanze per-

corrano gli aeronauti, senza quasi accorgersene.

Ma niente ci fornisce prove tanto evidenti, come il movimento del globo terrestre. Gli oggetti situati nel medesimo punto possono essere considerati come animati da un movimento comune, almeno per un certo tempo. Se questo movimento comune influisse sui movimenti particolari, questi sarebbero disordinati in diversi modi, secondo che gli oggetti fossero spostati nel senso del meridiano o nel senso del parallelo, dall'est all'ovest, o dall'ovest all'est. Ora gli spostamenti particolari conservano sempre lo stesso aspetto; essi sono dunque indipendenti dal movimento comune.

I fenomeni fisici e chimici riprodotti nei nostri laboratori sono un esempio d'altro genere. Essi non sono mai turbati dalla traslazione rettilinea e non ricevono nessuna scossa dal sostegno, su cui s'opera l'esperimento. Si possono considerare quindi le azioni in gioco, però in gradi differenti, come funzione delle distanze reciproche delle molecole e delle velocità, da cui queste sono animate le une in rapporto alle altre. Se il movimento comune alterasse i movimenti particolari, le

azioni se ne risentirebbero, e l'esperimento sarebbe più o meno imperfetto.

Essendo l'attenzione stata da lungo tempo richiamata su questa importante legge, essa pare oggi quasi una verità razionale e la si suppone tale implicitamente, quando si ammette come evidente che una forza, la quale agisca per una durata doppia, comunicherà una velocità doppia. Ma prima per altro si era ben lontani dal pensare così, perchè al momento in cui Galileo espose la sua scoperta, « si levò da ogni parte, dice Augusto Comte, un'infinità di obiezioni *a priori*, tendenti a provare l'impossibilità razionale d'una tale proposizione, la quale non è stata universalmente ammessa, se non quando si considerò la cosa non sotto il punto di vista metafisico, ma sotto il punto di vista fisico [1].

Questa legge è il fondamento di tutti i teoremi relativi alla combinazione dei movimenti o delle forze che li producono. Supponiamo due corpi animati da un movimento comune, e di cui l'uno compie inoltre, per rapporto all'altro, un movimento particolare, consistente nel

(1) *Cours de philosophie positive*, 2ª edizione, volume I, pag. 386.

descrivere, in un certo tempo, una porzione di retta più o meno inclinata su quella che rappresenta il movimento comune. A un momento dato, i due corpi, in virtù del loro movimento comune, avranno percorso due porzioni di retta eguali e parallele; quello che possiede inoltre un movimento particolare, avrà percorso la porzione di retta che lo rappresenta. Questo movimento particolare, riguardo al secondo corpo, sarà lo stesso che se il movimento comune non fosse esistito. Lo spostamento totale del primo corpo nello spazio sarà dunque raffigurato dal percorso successivo delle due rette, che rappresentano l'una il movimento comune e l'altra il movimento particolare; o dal percorso della linea, che chiude il triangolo e unisce il punto di partenza col punto di arrivo. Se il corpo fosse animato da un terzo movimento, il suo spostamento assoluto sarebbe raffigurato dalla linea, che chiude il contorno poligonale costruito con le tre rette; e così di seguito, qualunque sia il numero dei movimenti distinti, di cui il corpo trovasi dotato.

Reciprocamente, il movimento effettivo di un corpo può essere considerato come il risultato della combinazione di un numero qual-

siasi di movimenti particolari. Questi sono d'altra parte del tutto arbitrari; basta che l'estremità del contorno poligonale, costruito con le rette che li rappresentano, giunga al punto d'arrivo. Così s'afferma il diritto, già riconosciuto, di attribuire il movimento di un corpo a un'infinità di sistemi di movimenti parziali differenti o ad un'infinità di sistemi di forze differenti. Mentre che manifestamente, essendo dato un sistema, una sola risultante è possibile, cioè quella che raffigura la retta tracciata dal punto di partenza all'estremità del contorno poligonale, costruito con gli elementi del sistema.

S'è domandato, col fine di semplificazione teorica, se le tre leggi precedenti potessero essere ridotte a un numero minore, mercè qualche legge ancora più comprensiva, che contenesse due di esse. I tentativi fatti in questo senso non sono riusciti e dubito che possano riuscir mai. Infatti, quando sopprimiamo nella nostra mente una di queste tre leggi, le due altre non sono infirmate e continuano a sussistere integralmente: prova evidente della loro indipendenza reciproca. Quindi una legge in apparenza più generale non sarebbe

in realtà che la sovrapposizione di due leggi distinte, e la comprensione in un principio superiore costituirebbe per sè un puro sofisma.

La sola parte veramente comune tra la prima e la seconda legge è quella, che enuncia l'impossibilità per un corpo, sia a causa dell'inerzia, sia per l'eguaglianza tra l'azione e la reazione, di aumentare la propria velocità. Si troverebbe facilmente una formola, che evitasse questa ripetizione. Ma siccome la legge d'inerzia non è contenuta per intero in questa dimostrazione, non resterebbe meno per ciò allo stato di legge separata. Il miglioramento logico, ottenuto così, sarebbe compensato e senza l'inconveniente di presentare una legge imperfetta, di cui l'espressione mancherebbe di unità e anche di chiarezza. Gli sforzi dei geometri devono mirare piuttosto a scoprire nuove leggi, meno comprensive indubitabilmente, ma atte a fornir la chiave di particolarità, che l'analisi non riesce a riconnettere sufficientemente alle tre leggi precedenti. In quest'ordine di idee importa, com'io credo, l'ammettere una quarta legge generale, riservata di preferenza alla fisica, ma il cui intervento nella dinamica è indispensabile per

la spiegazione di parecchie categorie di fenomeni.

Questa quarta legge, dovuta ai lavori simultanei dei signori Mayer e Joule, conta appena un mezzo secolo di esistenza. Essa è nota sotto il nome di *Legge dell'equivalenza meccanica del calore*. Significa che tra un effetto meccanico e un effetto calorifico esiste un rapporto naturale, fisso e determinato. Esperimenti molteplici fatti da questi due fisici e dai loro successori hanno messo questo importante principio fuori d'ogni discussione.

Per elevare un decimetro cubo di acqua a 425 metri di altezza, occorre, secondo la media delle osservazioni, lo stesso consumo di calorico che per accrescere di un grado la temperatura di questo litro d'acqua. In altri termini, se la combustione del carbone, è impiegata, da una parte, a riscaldare direttamente dell'acqua, dall'altra a muovere una gru il consumo di carbone per aumentare di un grado la temperatura di un litro di acqua, e per far risalire a 425 metri il peso di un chilogramma, sarà identico nei due apparecchi. Reciprocamente, il movimento acquistato da un chilogramma, che cada da 425 metri di altezza, è equivalente a quella stessa

quantità di calore, designata in fisica sotto il nome di *caloria*. Questo è il rapporto secondo cui i fenomeni meccanici e i fenomeni calorifici si sostituiscono costantemente nella natura.

In virtù di questo nuovo principio, è oramai facile l'interpretare numerosi fenomeni, che sembravano costituire vere anomalie e che si era soliti di trascurare nell'esposizione della dinamica. Quando due corpi, per esempio, si urtano, essi perdono nell'urto, se non sono perfettamente elastici, una parte del loro movimento. Questa perdita poteva essere, in una certa misura, spiegata dalle forze molecolari, che bisogna vincere per comprimere definitivamente i corpi. Ma per lo più essa è sproporzionata con questo lavorìo interno. C'era dunque una perdita di forza, la cui causa era ignota e s'era preso il partito di passarla, per dir così, in conto dei profitti e delle perdite, senza ulteriori indagini. Donde alcune teorie, troppo superficiali, che hanno avuto corso per lungo tempo e di cui si trova ancora la traccia in alcuni trattati. Esse si contentavano di stabilire una relazione algebrica tra la frazione del movimento dileguato e le variazioni sopravvenute nelle velocità. Ma la legge di Mayer e Joule ha

rettificato il principio. Non esiste distruzione pura e semplice di movimento; il principio di conservazione non è intaccato: là dove cessa il movimento, appare il calore, le due parti del fenomeno si compensano.

Tutti i particolari dell'urto quindi si chiariscono incomparabilmente. Da una parte, si sapeva che i corpi perfettamente elastici non perdevano movimento. Se lo trasmettevano, scambiavano tra sè, ma la quantità rimaneva invariata. Al contrario non si riscaldano. Allo stesso modo i corpi durissimi, quasi inalterabili, prossimi a quello stato astratto considerato dai fisici sotto il nome di *solido geometrico,* non perdevano neppure un movimento apprezzabile. E anche essi non si riscaldano. Ma d'altra parte, si sapeva che i corpi suscettibili di schiacciarsi, senza dar luogo a un lavorìo interno sensibile, come il piombo, possono perdere tutto il loro movimento. Come si trasformava? Qui l'antica dinamica era muta. Ma oggi, noi sappiamo che questi corpi si riscaldano e che il loro aumento di temperatura corrisponde precisamente al movimento dileguato. Non ci dobbiamo quindi più chiedere: Perchè alcuni corpi debbono perdere la forza e perchè al-

cuni altri la conservano? Che diventa la sottrazione operata gradatamente nell'intero? La spiegazione del fatto è semplicissima. La perdita non esiste nè nell'un caso, nè nell'altro; si producono equivalenze mediante le quali la somma primitiva si ritrova sempre.

La stessa osservazione vale per tutti i fenomeni, in cui le influenze di contatto causano diminuzioni di velocità. Il fregamento è il più evidente. Esso ha messo sulla via dell'equivalenza meccanica del calore. Il conte di Rumford, con i suoi celebri esperimenti di Munich, è stato il precursore di Mayer e di Joule.

Inversamente, le reazioni al contatto, che generano movimento, sono accompagnate da una diminuzione di calore. L'esplosione di un composto chimico produce d'un tratto gas a un'altissima temperatura. Questi gas, dilatandosi, sospingono i corpi posti loro innanzi. Ma nel medesimo tempo si raffreddano, e si raffreddano nella proporzione, in cui il movimento si è comunicato. Non c'è creazione qui, come là non c'era distruzione. L'elemento dinamico si forma a spese del calore sottratto al gas durante la loro dilatazione. Quel calore stesso risultava dal consumo di

una certa composizione chimica, in cui la potenza era stata trasfusa.

La legge di Mayer e Joule, che noi abbiamo esposta, è il vero legame tra la meccanica e la fisica. Nonostante le sue origini, essa ha il suo posto distinto nella prima di queste due scienze. Poichè non solamente ne spiega i fenomeni, ma è compartecipe del carattere delle tre prime leggi: essa è, come queste, indipendente dalla natura dei corpi. L'eguaglianza tra l'azione e la reazione, la conservazione indefinita della velocità, l'indipendenza dei movimenti, si mantengono in ogni specie di materia, si verificano in ogni sorta di corpi. Del pari l'equivalenza tra l'effetto dinamico e l'effetto calorifico è vera per tutti i corpi. Che si impieghi un apparecchio termico per sollevare dei pesi o per riscaldare dell'acqua, il rapporto osservato tra le due serie di effetti non si risentirà in niente della natura dei materiali adoperati nella costruzione di quest'apparecchio. Due masse eguali, animate dalla medesima velocità, rappresentano la medesima quantità di calore, qualunque sia la specie di materia di questi corpi. Un chilogramma di marmo, o un chilogramma di ferro, cadendo da 425 metri di altezza,

rappresentano l'uno e l'altro una calorìa. La relazione termodinamica è dunque dello stesso ordine delle tre leggi generali del movimento e merita soprattutto di figurare accanto ad esse.

Ho sempre insistito sulla necessità di non separare l'edifizio meccanico dalle sue basi sperimentali. Pretendere di supplire ad una di esse con gli espedienti dell'analisi o con considerazioni metafisiche, è condannarsi anticipatamente a dimostrazioni difettose. Se ne trova un esempio istruttivo negli sforzi fatti da illustri geometri per stabilire direttamente sia il parallelogramma delle forze, sia la proporzionalità della velocità alla durata dell'azione. Il libro, così giustamente rinomato di Poinsot sulla statica, mostra chiaramente come i più grandi ingegni sono impotenti a dimostrare, col solo ragionamento, l'equivalenza tra una forza unica e l'azione combinata di due forze distinte. Poichè, che cosa prova, ad eccezione dell' esperienza, che una forza unica è capace d'impedire o sostituire il movimento dovuto alla combinazione di due forze su un punto materiale? In questo modo non si ammette ciò che si cerca, vale a dire la possibilità di trovar loro una risul-

tante? E similmente, che cosa dimostra, salvo l'esperienza, che le velocità consecutive s'aggiungeranno? Noi trasportiamo qui, nel campo fisico, verità del campo razionale. Come se noi addizionando lunghezze, superficie, masse, volessimo addizionare anche le velocità senza sapere, se esse si comportano in natura, come le unità di una somma aritmetica. Bisogna guardarsi da una simile confusione e serbare una separazione netta tra le idee, che procedono dallo spazio, dal tempo, o dalla pura logica, e quelle che derivano dalla materia e dalla realtà del mondo esterno.

---

## CAPITOLO V.

### Quantità di movimento - Lavoro Forza viva - Energia.

I fenomeni si svolgono nel tempo. Qui siamo indotti a credere che gli effetti di una potenza si accumulino per la durata della sua azione e che il risultato finale ne rappresenti il totale numerico. Se dunque la potenza è costante in intensità, il risultato, in ogni momento, ci sembra che dovrebbe essere proporzionale al tempo trascorso.

Ora le cose non si comportano sempre così in natura. In molti casi, la potenza essendo costante, l'effetto osservato non aumenta uniformemente con la durata. Ma la progressione si rallenta a gradi e finisce anzi per arrestarsi a un tratto, come se il risultato già ottenuto costituisse un ostacolo a un progresso nuovo. Quando si sottopone un corpo al contatto d'una sorgente termica invariabile, il calore che riceve non è in ra-

gione diretta del tempo; esso cresce sempre più lentamente a misura che l'operazione si prolunga. La carica d'una batteria elettrica non può accrescersi indefinitamente, malgrado una produzione continua di elettricità alla sorgente. Un cristallo, che si forma in seno di un liquido saturo, non aumenta incessantemente di spessore, anche se il liquido è mantenuto al punto di saturazione voluta. Senza dubbio questi fatti si spiegano per le cause accessorie, che vengono a contrastare l'azione della potenza. Ma quando si analizza un fenomeno, non si è mai certi di conoscere tutto; e per conseguenza non si può affermare a priori che, eliminando le cause così dette accessorie, la proporzionalità del risultato al tempo si verificherà esattamente. Sembra piuttosto che esistano limiti, che, per una ragione o per un'altra, la natura nega di oltrepassare.

La produzione della velocità peraltro fa eccezione. Il cumulo degli effetti si sussegue indefinitamente e la velocità trasmessa a un corpo da una forza costante aumenta sempre in proporzione della durata. È la conseguenza stessa della legge di Galileo. Essendo i movimenti indipendenti gli uni dagli altri, la velocità impressa, durante un' unità di tempo,

in una qualsiasi fase, sarà la stessa che se il corpo partisse dalla quiete. Essa si aggiunge alla velocità già acquisita durante le unità di tempo precedenti, poichè segue la stessa direzione. Dunque, al termine di un periodo determinato, la velocità totale sarà eguale alla velocità trasmessa, durante l'unità di tempo, moltiplicata per il numero di unità contenute in questo periodo. Perciò si dice che l'azione di una forza costante, durante un certo tempo, o la sua *quantità d'azione,* ha come formola il prodotto della forza per il tempo impiegato.

D'altra parte, l'effetto ottenuto o la velocità acquistata dal corpo è in ragione inversa della sua massa; giacchè, per definizione, le masse sono proporzionali alle forze che loro imprimono la medesima velocità. Per conseguenza, se la massa è doppia, la forza dovrebbe essere raddoppiata per comunicare la medesima velocità; e se questa forza rimane la stessa, la velocità conseguita è metà. La velocità acquistata dal corpo è dunque nel tempo stesso proporzionale alla quantità d'azione della forza e inversamente proporzionale alla massa. O pure, la quantità d'azione è proporzionale al prodotto della massa per la velocità acquisita. Questo pro

dotto ha ricevuto il nome di *quantità di movimento*. Così c'è proporzionalità tra la quantità d'azione o la causa, e la quantità di movimento, o l'effetto visibile. Ciò è notevole; poichè in generale, nei fenomeni fisici, l'effetto osservato è minore dell'effetto reale, il quale è velato o distrutto in parte da altre cause.

Invece d'essere semplicemente proporzionali, i due prodotti diventano numericamente eguali, se si fa una scelta conveniente di unità. L'unità di massa deve essere tale, che mossa dall'unità di forza, essa acquisti, in capo dell' unità di tempo, una velocità eguale all' unità di lunghezza. Ora come s'è già visto, ci siamo arrestati appunto a questa combinazione. L' unità di massa scelta è di $g$ decimetri cubi di acqua e questa massa, sottomessa all'azione di 1 chilogramma, prende una velocità d'un metro in capo ad un minuto secondo. Lo scopo potrebbe essere raggiunto con qualsivoglia sistema di unità, purchè soddisfacesse alla medesima relazione sperimentale.

Se la forza motrice variasse d' intensità, nella durata della sua azione, bisognerebbe ricercarne il valore medio; l' eguaglianza tra

la quantità d'azione e la quantità di movimento esisterebbe allora per questo valore medio. Se variasse anche la direzione, la forza e la velocità dovrebbero essere costantemente calcolate in rapporto alla direzione del movimento, e l'eguaglianza si stabilirebbe con le componenti tangenziali della forza e della velocità. Ma queste peculiarità, necessarie in un trattato didattico, non importano gran fatto dal punto di vista filosofico. Io supporrò d'ora innanzi che la forza sia costante in grandezza e in direzione.

Una massa in movimento rappresenta precisamente l'accumularsi degli effetti prodotti dalla forza. Come, in virtù della legge d'inerzia, la massa conserva la sua velocità indefinitamente; così essa rappresenta questo accumularsi in un momento qualunque della durata. Essa è anche suscettibile di riprodurre gli effetti della forza o di produrne dei somiglianti a quelli, che ha subiti. Ancorchè si opponga al corpo una resistenza eguale e contraria alla forza primitiva, esso sarà ricondotto alla quiete, dopo un tempo eguale a quello che era stato impiegato da questa forza per comunicargli il suo moto. Conclu-

sione assai notevole, non essendo un effetto ordinariamente suscettibile di rigenerare la causa, che lo ha prodotto.

V'ha di più; la massa in movimento è capace di effetti, che la forza motrice stessa non avrebbe generati. Così essa può vincere (durante un tempo molto più breve, è vero) una forza assai superiore a quella, che l'ha mossa. Per ciò essa si rassomiglia più a un corpo carico di elettricità, che a un corpo carico di calorico, col quale essa ha, d'altra parte, tante altre analogie.

I corpi sono veri accumulatori di azione motrice, come sono accumulatori di elettricità o di calore. La facoltà di assorbire o ricettare questi ultimi dipende dalla natura del corpo, dalla specie di materia, che lo costituisce, e da diverse altre condizioni fisiche e chimiche. L'accumulamento dell'azione motrice dipende unicamente dalla densità o dalla massa sotto l'unità di volume. L'elettricità e il calore, una volta accumulati in un corpo, si conservano mediante certi espedienti particolari. L'azione motrice si conserva anche con espedienti analoghi. Il corpo in movimento deve essere sottratto oramai alle cause di perdita della velocità: sfregamenti, urti,

resistenze del mezzo ecc. In una parola, il corpo deve trovarsi in uno stato di isolamento perfetto. Non apparisce ivi differenza essenziale con le condizioni, che assicurano la conservazione delle altre energie naturali.

Due quantità di movimento nello stesso senso s'aumentano; due quantità di movimento nel senso contrario si diminuiscono. Per conseguenza due quantità di movimento eguali e in sensi opposti formano un totale eguale a zero. Questa operazione aritmetica non deve causar confusione e far supporre che due quantità di movimento eguali equivalgano all'assenza di movimento. Ciò equivarrebbe a confondere un risultato algebrico con un risultato fisico. Nelle formole i termini eguali e di segni opposti possono essere cancellati, ogni qualvolta la soluzione del problema dinamico dipende unicamente dal *valore numerico* della quantità totale di movimento, e che quindi simile compensazione non ha influenza. Per esempio, il movimento medio di parecchi corpi, o la velocità del centro di gravità, secondo una direzione qualunque, è espressa analiticamente dalla somma delle quantità di movimento di questi corpi (proiettate sulla direzione), divisa per la somma delle loro masse.

Se in un sistema simile, due corpi animati da quantità di movimento eguali e contrarie sono ricondotti alla quiete, il totale non sarà alterato e il movimento del centro di gravità resterà il medesimo. È dunque agevole il considerare queste due quantità come neutralizzantisi e possibili ad essere cancellate. Esse si annullano in fatti, in quanto al movimento del centro di gravità e di fronte a ogni altro elemento, la cui grandezza dipendesse solo da questo valore numerico.

Ma esse sono ben lungi dall'annullarsi sotto il rapporto fisico. Poichè, se i due corpi, diretti così in sensi opposti, venissero ad incontrarsi, ne risulterebbe un fenomeno a volte assai distruttore; un urto, che, secondo il grado di elasticità dei corpi, lascerebbe inoltre sussistere dopo di sè un certo movimento e una quantità di calore proporzionale al movimento scomparso (io trascuro il lavorìo interno). C'è dunque un abisso tra la compensazione matematica e la neutralizzazione fisica. La prima è un'operazione astratta, la seconda è un fenomeno reale. È illogico il conchiudere dall'una all'altra. Le quantità di movimento hanno lo stesso valore concreto, qualunque sia il senso nel quale si

dirigono e il segno algebrico di cui esse sono affette. Esse sono suscettibili di produrre i medesimi effetti, e questi effetti invece di compensarsi, si combinano.

I fenomeni meccanici, come ho già detto, si svolgono nel tempo; questo fatto spiega la nostra tendenza a considerare l'azione della forza continua per un certo intervallo; e questo fatto appunto, ci ha portati alla nozione della « quantità d'azione ». Ma essi si compiono altresì nello spazio, o si svolgono nelle porzioni successive dello spazio. Perciò essi si differenziano a bella prima dai fenomeni psichici, e quindi da un gran numero di fenomeni fisici, quali sono le variazioni di splendore, di temperatura, di elettrizzazione; senza far cenno di quelli, dove il mutamento di posizione, quando esiste, si dilegua ai nostri occhi, di fronte all'importanza delle variazioni connesse unicamente con la durata. Nei fenomeni meccanici, al contrario, il mutamento di posizione, lo *spostamento*, ha un'importanza capitale; ma che dico io? esso n'è la condizione, l'essenza stessa.

Quindi doveva succedere che la scienza progredendo desse una considerazione maggiore alla correlazione della forza con lo

spazio; e che all'antica nozione del prodotto della forza per la durata essa abbia opposto, o meglio aggiunto quella del prodotto della forza per il percorso.

Questa duplice concezione non ha soltanto la qualità d'essere logica, ma essa corrisponde a un ordine reale. Nella natura in vero noi vediamo due sorgenti di movimento: le forze *animate* e le forze *inanimate;* io intendo con ciò parlare di quelle, che emanano dagli esseri viventi e di quelle assai più potenti, che si devolvono dalla materia bruta. Le prime sono influite e del pari dominate dal tempo. Esse si consumano e si dissipano con questo. Chi non sa che uno sforzo ci spossa, anche se l'ostacolo contro il quale noi premiamo resta immobile? Noi non potremmo anco rimanendo sempre fermi nel medesimo punto tenere un peso sollevato, o sopportare un carico. Così l'impiego dell'uomo e dei motori animati si valuta generalmente per mezzo della durata: si tiene calcolo delle ore durante le quali si effettua. Le forze inanimate non conoscono fatica; esse possono, in quiete, conservare la loro intensità attraverso i secoli. Un peso sollevato, un gas compresso, una molla tesa possono sempre

produrre i medesimi effetti in qualunque istante si lascino agire. Il loro potere dunque non è soggetto al tempo. Solo il movimento lo menoma. La rimozione del punto d'applicazione è per esse la causa e la misura del consumo. Essa si sostituisce alla durata come elemento generatore del fenomeno meccanico [1].

Per una coincidenza notevole, questo medesimo elemento si ritrova nella maggior parte degli effetti, che noi cerchiamo di ot-

---

(1) Questa distinzione non implica una dualità *d'essenza* nelle forze della natura. I motori animati sono *trasformatori* assai complessi, ma sottoposti parimente alle leggi generali della materia. Si sa, dopo Lavoisier che non sono altro, che *macchine a fuoco*, bruciando esse il combustibile introdotto con l'alimentazione. L'attitudine a fornire forza meccanica è in ogni istante impedita dalla necessità, di conservare le diverse parti dell'organismo, che consumano, quasi proporzionalmente al tempo, una frazione importante delle riserve accumulate nella circolazione. Ecco perchè il loro funzionare come motore meccanico non può aver luogo che in danno d'altre funzioni dell'organismo; il che spiega che il tempo compartecipa in modo necessario nel dispendio della forza meccanica. Ma questa identità di sostanza non impedisce nulla di meno che sussista una differenza di forma tale, che i nostri concetti meccanici non ne abbiano dovuto naturalmente risentirne.

tenere per i nostri bisogni individuali. Poichè questi effetti consistono nel vincere resistenze o forze inanimate, la lunghezza di certi percorsi. Non accade egli così, quando noi lavoriamo il legno, la pietra o i metalli, quando noi solleviamo pesi, quando noi trasportiamo dei carichi? Non siamo noi sempre in presenza di due elementi identici, necessariamente associati? Questo prodotto della forza sia attiva, sia resistente per la lunghezza percorsa ha ricevuto da molto tempo nelle arti il nome di *lavoro*. La scienza ha adottato questo termine, che è così adoperato oggi nella meccanica pura, come nella meccanica applicata. Nelle più alte speculazioni dell'astronomia, come nelle più umili operazioni dell'industria il « lavoro » rappresenta un fatto necessario, così familiare alla natura, che alla nostra intelligenza [1].

In quel modo, che esiste una relazione matematica tra la quantità d'azione e la quantità di movimento, così deve esistere una re-

---

(1) Il termine *lavoro* per la sua origine, ha l'inconveniente d'essere soggettivo; esso risveglia l'idea d'una operazione individuale. Sarebbe stato meglio, come mi sembra, dire: *consumo della forza* o semplicemente *consumo, spesa*.

lazione tra il lavoro e qualche funzione della velocità. Descartes aveva scoperta la prima; Leibnitz ha trovato la seconda, e con esse ha reso forse un servizio maggiore alla dinamica. Egli ha riscontrato che il lavoro speso per imprimere una velocità a un corpo totalmente libero è eguale *alla metà del prodotto della massa per il quadrato della velocità.* Questo rapporto rimasto per tanto tempo ignorato, ora ci sembra semplicissimo, almeno nel caso in cui la forza è costante. In fatti la velocità comunicata a un mobile, dopo un percorso qualsiasi, è proporzionale all'intensità della forza ed in ragione inversa della massa, oppure la forza è proporzionale al prodotto della massa per la velocità. D'altra parte la lunghezza percorsa è proporzionale alla velocità media, che è la metà della velocità acquistata dopo il percorso.

Adunque il prodotto della forza per il percorso è proporzionale al prodotto della massa per la velocità acquisita. In altri termini il lavoro è proporzionale al semiprodotto della massa per il quadrato della velocità acquisita. La proporzionalità si cambia in eguaglianza, se le diverse unità sono convenientemente scelte, cioè: se l'unità della massa,

spinta dall'unità della forza, prende una ve-
locità eguale all'unità di lunghezza, al ter-
mine d'un percorso eguale alla metà di questa
unità: Ora avviene precisamente così nel si-
stema già adottato: la velocità eguale alla
unità di lunghezza è acquistata, ricordiamolo,
al termine dell'unità di tempo; ma durante
l'unità di tempo, il percorso si confonde con
la velocità media, cioè è eguale alla metà
della velocità acquisita, o alla metà della
unità di lunghezza.

Il semiprodotto della massa per il qua-
drato della velocità è stata denominato *forza
viva*; e l'eguaglianza che la riconnette al *la-
voro* è detta: *equazione della forza viva.*
Per esplicare queste espressioni, bisogna no-
tare che il vocabolo « forza » è preso qui
nell'accezione in cui l'usano i fisici, quando
parlano della « forza d'una macchina » per
designare non lo sforzo ch'essa esercita, ma
il lavoro che può produrre in un tempo dato.
Quanto all'attributo « viva » si noti che ri-
chiama l' idea di movimento, come nell'espres-
sione così nota di « acqua viva » che signi-
fica: acqua corrente. « Forza viva » signi-
fica dunque propriamente *lavoro in movimento*
e l'immagine è vera; poichè il corpo animato

rappresenta il lavoro consumato per trasmettergliela: esso può rigenerare questo lavoro così bene, come la quantità di movimento rigenera la quantità d'azione. La massa, in stato di quiete, è *morta* come forza; essa è *viva*, quando si muove, perchè allora è un vero serbatoio di forza.

Il solo difetto di questi termini è quello di originare una certa illusione. Sembra che esistano entità corrispondenti e due specie di potenza, di cui un corpo sarebbe di volta in volta rivestito: l'una espressa con la velocità di primo grado, l'altra con la velocità di secondo grado. In realtà i corpi non posseggono, realmente parlando, nè quantità di movimento, nè forza viva; essi non hanno che massa e velocità, e non possono aver altro. Queste così dette entità non sono altro, che espressioni numeriche, che semplici relazioni stabilite tra la velocità, da una parte, e la durata o lo spazio, dall'altra parte. Il loro intervento nei calcoli non potrebbe comunicare agli oggetti delle proprietà speciali.

Nasce qui la difficoltà, che io ho di già accennata, e che prima pareva insolubile, quando si studiavano i fenomeni dell'urto

sotto il duplice aspetto della quantità di movimento e della forza viva. Come spiegare, per esempio, questo fatto così semplice?

Due sfere simili, animate da velocità eguali e opposte si incontrano sulla linea dei centri. Se queste sfere sono perfettamente elastiche, esse rimbalzano indietro, sembrando che l'una abbia ricevuto la velocità dell'altra; la quantità di movimento, nella prima, è nulla in seguito; quanto alla forza viva, essa mantiene il suo medesimo valore positivo. Ma se al contrario le sfere si schiacciano l'una contro l'altra, come il piombo; se esse rimangono, dopo l'urto, congiunte e immobili, la quantità di movimento continua sì ad esser nulla, ma la forza viva non conserva più il suo valore primitivo; essa si annulla contemporaneamente alla quantità di movimento.

Non pare che vi sia del paradossale nel vedere la potenza dinamica diportarsi in modo differente, secondo che la si considera allo stato di quantità di movimento, o allo stato di forza viva? Ma la questione cambia subito d'aspetto se si pon mente di considerare le due concezioni soltanto come espressioni numeriche, che non intaccano la sostanza delle cose. Inoltre, così come l'ho già accennato, la

termodinamica ha ristabilito l'unità del fenomeno. La forza viva, rimasta positiva nel primo caso, non si annulla effettivamente nel secondo; essa si trasforma in calorico, cioè – se le leggi della fisica moderna sono esatte – in un movimento vibratorio di potenza equivalente.

La relazione della forza viva ha questo grande vantaggio su quella della quantità del movimento, di permettere cioè una deduzione molto più rapida e facile degli effetti, che si possono aspettare da una forza motrice. Dal momento che questa, comunemente inanimata, non è subordinata al tempo e ch'essa si esaurisce soltanto in ragione del percorso compìto, la cognizione del lavoro è molto più importante che la quantità d'azione. Esso ci fa conoscere ciò che la forza ha prodotto, e quello che può ancora produrre; esso misura la spesa non solo nel significato scientifico della parola, ma anche nel senso economico; poichè nelle operazioni industriali il costo è proporzionale al lavoro, cioè al percorso e non alla durata. Chi non sa che la spesa (nel senso economico) d'una macchina idraulica, e d'una macchina a vapore è, sempre, a parità di condizioni, in ragione del nu-

mero dei giri della ruota, o dei colpi di stantuffo e che la durata non vi influisce che in un modo secondario e indiretto?

La medesima relazione ha ancora un altro vantaggio. Essa basta a determinare lo spostamento del mobile, ogni qualvolta questo non si può muovere che in una sola direzione. Succede spesso nella scienza pura come del pari nella meccanica applicata, che il sistema è costituito in siffatto modo, o è subordinato a siffatte condizioni, che è possibile un solo movimento. In questo caso l'equazione della forza viva, qualora si riesca a stabilirla, risolve immediatamente il problema. A ogni modo essa ne fissa uno degli elementi essenziali. In fine essa ha il merito inestimabile di determinare e di rendere più comprensibili le equivalenze scoperte dalla fisica moderna. Il calore, l'abbiamo già osservato, è direttamente equivalente non a quantità di movimento, ma a forza viva, e con ciò si potè finalmente divinare la natura stessa del calore, che si rivelò come una vibrazione. Il medesimo fatto si constatò per l'elettricità, per la luce, per la potenza chimica; la loro equivalenza sta di fronte alla forza viva e fa così presentire l'identità fondamentale dei diversi modi dell'attività in natura.

In presenza di questa nuova concezione, i geometri e i fisici non potevano rimanere vincolati a un termine limitato, come quello di forza viva, il quale richiama assolutamente una forma peculiare dell'attività universale, quella che si manifesta con il movimento sensibile dei corpi. Si rese necessario un termine più comprensivo, applicabile simultaneamente a tutti questi fenomeni d'aspetto così vario. Il vocabolo *energia* è stato adottato, di comune accordo, dai filosofi e dai fisici. Questo designa egregiamente la potenza latente in un corpo allo stato di calore, d'elettricità, o l'affinità chimica, come pure allo stato di forza viva.

Il carbon fossile in seno alla terra rappresenta energia solare accumulata da secoli. Il vapore d'acqua, che si libra nell'atmosfera genererà, condensandosi e ricadendo sul suolo, della forza e del calorico. La pianta, l'animale sono come macchine che consumano l'energia esterna, contenuta negli alimenti, per riprodurla sotto forme differenti. Gli atti della volontà, secondo le ultime indagini dei fisiologi, sono accompagnati da correnti elettriche, il cui consumo corrisponde agli effetti prodotti. Il mondo, secondo la scienza moderna, è un

immenso laboratorio, dove si compie incessantemente la trasformazione dell'energia.

Nella natura, l'energia apparisce sotto due forme molto differenti: *in potenza* e allo stato di *effetto compito*. Un corpo, situato a una certa altezza dal suolo, rappresenta in potenza la quantità di energia o di forza viva che svilupperà cadendo, sotto l'impulso della gravità fino al contatto del suolo. Il suo peso moltiplicato per l'altezza esprime il lavoro latente o *potenziale*, che risiede in esso, prima che la caduta cominci. Dopo la caduta questo stesso prodotto rappresenta, non più un lavoro in potenza, ma un lavoro effettuato e per conseguenza la forza viva dinamica ingenerata da questo lavoro nel corpo. A un punto intermedio qualunque, l'energia latente o potenziale nell'istante della partenza si divide in due parti: una, la forza viva sviluppata a principio della caduta e dicesi energia *attuale* o forza viva propriamente detta; l'altra quella che continua a ritenere il nome di energia *potenziale*, e corrisponde al supplemento di forza viva, di cui la continuazione della caduta sarà la sorgente. In breve « l'energia totale devoluta a un corpo è eguale alla somma delle sue energie attuale e poten-

ziale ». Ognuna di queste aumenta o diminuisce, quando l'altra diminuisce o aumenta, ma il loro totale rimane invariabile. Questo è il *principio della conservazione della forza viva*. Esso esprime questa verità che non è in potere di un corpo il variare la dose di energia, di cui è depositario, secondo la situazione, che occupa in rapporto agli altri corpi dell' Universo.

Così il globo terrestre racchiude, riguardo al sole, un'energia totale misurata dalla forza viva, che possiede attualmente e da quella che acquisterebbe se, non essendo trattenuto dalla sua velocità acquisita, potesse cadere liberamente su di esso, in virtù dell'attrazione newtoniana. Queste due forze vive si modificano continuamente, a misura che la terra aggirandosi sulla sua orbita s'allontana o s'avvicina al sole; ma la loro somma rimane sempre la stessa.

Non bisogna confondere il principio della conservazione di energia con la legge di inerzia.

La legge di inerzia non concerne che i corpi presentemente forniti di velocità, e essa enuncia che questa velocità si conserva integralmente, se nessun ostacolo esterno la distrugge.

Il principio dell'energia concerne la conservazione stessa della forza; esso implica che questa forza non si affievolisce col tempo e dovrà quindi produrre i medesimi effetti in qualunque momento si valuti. La terra conserva la sua energia in rapporto al sole, perchè l'attrazione universale si eserciterà egualmente ogni anno. Se quest'attrazione potesse subire una diminuzione nel corso del tempo, il principio della conservazione dell'energia si troverebbe allora in fallo. La legge d'inerzia peraltro continuerebbe ad essere immutata. Le velocità acquistate dai corpi sotto queste forze, che diminuiscono, non cesserebbero di essere, una volta stabilite, assolutamente invariabili.

Il principio della conservazione di energia si fonda dunque tacitamente su questo fatto, che le forze naturali sono indipendenti dal tempo. Esse si mostrano tali, d'ordinario, alle nostre osservazioni, ed è ciò che ci permette di proclamare la costanza della energia nell' Universo.

---

## CAPITOLO VI.

### CONSERVAZIONE DEL MOVIMENTO E DELL'ENERGIA IN NATURA.

Il sistema solare può essere considerato come interamente isolato nell' Universo. Gli astri, che lo circondano, sono troppo distanti per esercitare su di esso, malgrado il loro numero, alcuna influenza apprezzabile. La luce, che noi riceviamo da tutte le stelle complessivamente, non supera quella che emetterebbero 320 stelle di prima grandezza [1].

Se si adotta la medesima legge per l'attrazione — che decresce secondo la stessa regola dell'intensità della luce — la totalità degli astri eserciterebbe su noi un'azione equivalente a quella di 320 stelle di prima grandezza, o di 320 soli simili al nostro. Ora le

---

(1) *Sur l'origine du monde* di H. FAYE, dell'Istituto, 2ª edizione, pag. 180. Vedasi anche *Le Soleil*, del Rev. P. SECCHI, volume II, libro VIII.

stelle di prima grandezza trovandosi collocate, in media, a una distanza di un milione di volte, pari a quella del sole alla terra, l'attrazione di ognuna d'esse sul nostro globo non è che la trilionesima parte di quella del sole; e l'attrazione delle 320 stelle starà a quella del sole nel rapporto di 1 a 31 miliardi, vale a dire rappresenterà una quantità assolutamente trascurabile. Si ha dunque il diritto di ritenere il sistema solare come unicamente soggetto alle sue forze interne, gravitazione e azioni di ogni natura, sviluppate tra i corpi e tra le loro ultime particelle.

Se si prendesse a calcolare ciò che avviene per ogni corpo, e a più forte ragione per ogni particella di materia, si urterebbe contro difficoltà inestricabili. Le azioni sono così numerose, le loro leggi ancora così poco note, le condizioni rispettive variano con tale rapidità; infine la riunione di tutti i particolari è così complessa, che l'ingegno più grande non può nemmeno pensare di dedicarsi ad un'analisi approssimativa dei fenomeni, che si susseguono nel nostro mondo. Ma se si adotta una via inversa; se, invece di procedere per analisi, si procede per sintesi è possibile indurne qualche risultato ge-

nerale e formulare dei principî, paragonabili, per la loro semplicità, alle leggi fondamentali del movimento o, a meglio dire, essi ne sono la riproduzione sotto un'altra forma.

In virtù della legge di eguaglianza tra l'azione e la reazione, ogni movimento, che si produce, o tende a prodursi, in un punto qualunque del sistema, ha il suo contrapposto su qualche altro punto. Le attrazioni, le repulsioni sono reciproche due per due. Un corpo, che urta contro un altro, tende a trascinarlo con la stessa forza, che questo impiega a trattenerlo. La resistenza al movimento opposta da un mezzo, più o meno denso, liquido o gasoso, o sia pure pulverulento, occasiona la medesima osservazione; questo mezzo riceve la medesima pressione e subisce i medesimi sfregamenti, che esso stesso esercita sul corpo durante il suo spostamento. Gli urti, le esplosioni non ledono l'equilibrio; poichè, nel corso del fenomeno, alcune parti del corpo si comprimono o si distendono, a guisa di molle, e generano ad ogni istante azioni eguali e direttamente opposte. I legami stessi, che uniscono i corpi gli uni agli altri, e sembrano fare ostacolo alla loro mobilità naturale, non potrebbero nullameno alterare l'insieme: la

flessione, la torsione, la tensione di questi legami si risolvono in azioni molecolari, che rivestono dovunque il carattere della reciprocità. In breve, nel sistema solare, dato che si elimini l'influenza dei mondi circostanti, non rimane altro, che una varietà innumerevole di forze grandi o piccole, permanenti o temporanee, vicine o distanti, costantemente eguali due a due e di direzioni contrarie. Se si potesse d'un tratto solidificare il sistema, vale a dire unire tutti i corpi e tutte le particelle materiali con aste rigide e inestensibili, dandogli d'or innanzi una forma invariabile, le forze si farebbero vicendevolmente equilibrio e non potrebbero determinare nessun movimento.

In fatti il sistema non è ristretto in legami siffatti; e le parti in esso hanno una libertà maggiore o minore, le une in rapporto alle altre. E però l'equilibrio generale non mette capo all'immobilità. I corpi sono al contrario in perpetuo moto e le loro velocità variano all'infinito. Due forze reciproche, come quelle che si sviluppano tra il sole e la terra, appunto perchè si esercitano su masse assai differenti, non possono cagionare gli stessi spostamenti. La massa più grave si muove

meno velocemente dell'altra. Ma le velocità sono in ragione inversa delle masse, di maniera che costantemente le quantità di movimento si trovano eguali e in sensi opposti.

Se si suppongono idealmente rappresentate in un immenso quadro le quantità parziali di movimento, che si sviluppano, di momento in momento, nei diversi punti del sistema; se si proiettano su una qualsiasi direzione e si addizionano, la somma aritmetica avrà sempre il medesimo valore. Gli urti o le esplosioni, se sopravvengono, affetteranno egualmente e i termini positivi e i termini negativi, ma non muteranno il risultato finale della somma. Dunque la quantità generale del movimento del sistema solare, in ogni direzione, è o nulla o costante.

Lo spostamento del centro di gravità di un sistema qualunque è, com'è noto, determinato dal valore della quantità generale di movimento. Se questa quantità è costante, il centro di gravità è animato da un movimento uniforme. Il centro di gravità del sistema solare non può, secondo questo principio, che essere fisso, o dotato di una velocità invariabile.

La constatazione, fatta in questo secolo, di una traslazione rapida del sole verso la co-

stellazione di Ercole, esclude la prima ipotesi. Il sistema solare possiede dunque in complesso un movimento uniforme, poichè le azioni esterne sono interamente trascurabili. Tuttavia questa azione potrà modificarsi nel corso del tempo, se il sistema, in virtù del suo spostamento continuo, arrivi tanto vicino ad altre stelle, che queste esercitino su di esso un'influenza apprezzabile.

In natura un movimento di traslazione del centro di gravità non esiste mai solo. È sempre accompagnato da una rotazione intorno a questo stesso centro. Perchè accadesse diversamente, sarebbe necessario un concorso di circostanze molto speciali. Nel caso di un corpo solido, per esempio, bisognerebbe che la risultante generale degli impulsi, che gli hanno comunicato la sua velocità originaria, fosse passata precisamente per il suo centro di gravità. La traslazione del nostro sistema sarebbe dunque resa grandemente probabile da un giro generale intorno al sole, se già Newton e Laplace erano giunti a questa conclusione direttamente dalla rivoluzione dei pianeti. Oggi essa è definitivamente dimostrata dalla rotazione del sole su sè stesso, osservata per mezzo delle macchie.

La conservazione della quantità di movimento (che non è, come si è accennato, la conservazione *assoluta* del movimento, ma la semplice costanza del totale algebrico delle quantità parziali, valutate secondo una direzione qualsiasi) ci ha condotti a queste conclusioni. Ma essa non prova niente in quanto alla conservazione della forza viva e dell'energia, le quali si valutano in un modo tutto differente. Per rendersene conto, bisogna risalire alle considerazioni precedenti.

In un sistema, in cui i corpi cambiano di posizione gli uni in rapporto agli altri, e in cui le velocità individuali si modificano, la forza viva dell'insieme subisce incessanti vicissitudini. La forza viva della terra, per esempio, aumenta o diminuisce, secondo che il suo movimento intorno al sole si accelera o si rallenta. La forza viva degli astri del pari che quella di tutte le particelle di materia non può ritornare la stessa, se non nel caso che, a un momento dato, questi astri e queste particelle ripassassero precisamente per le stesse posizioni; intendo dire cioè, che si ritrovassero alle stesse distanze gli uni in rapporto agli altri. Salvo questa universale coincidenza, che non si riproduce senza dubbio

mai, la forza viva del sistema è esposta a variazioni continue. Ma queste variazioni spariscono, se si considera non solamente la forza viva attuale dei corpi, ma anche la loro forza viva potenziale, complemento necessario della prima. Purchè le forze siano unicamente funzione delle distanze, e non si affievoliscano col tempo, la somma di queste due forze vive o l'energia totale non rischia di diminuire. Ciò si verifica nel sistema solare, con le sue azioni interne reciproche e grazie all'equivalenza delle energie.

Durante la circolazione d'un pianeta intorno all'astro centrale, o di un satellite intorno al suo pianeta, l'energia rappresentata, in ogni momento, e dalla velocità acquisita e da quella che potrebbe procurare l'esaurimento della distanza, rimane costante. Accade lo stesso, quando procedendo dal grande al piccolo, si scrutano le forze molecolari e le affinità chimiche. Dovunque l'energia globulare è indifferente ai cambiamenti di posizione, trovando in uno dei due termini una precisa compensazione alle alternative dell'altro. Senza dubbio un urto improvviso, l'incontro di due astri, modificherebbe molto la forza viva dinamica. Ma il compimento del lavorìo interno,

rappresentato dallo schiacciamento di queste grandi masse, e l'apparizione di un'enorme quantità di calorico compenserebbero la perdita della forza viva. L'energia generale assumerebbe allora un'altra forma, ma conserverebbe il suo valore. Un'esplosione formidabile, come quella che ha potuto, nelle epoche cosmogoniche, far andare in frantumi qualche pianeta, aumenterebbe d'un tratto con perdita, la forza viva di tutto il sistema. Ma questa forza viva sarebbe prodotta a danno dell'energia contenuta nella materia, la quale per la sua espansione in seno del pianeta, avrebbe determinato la catastrofe. In realtà, non ci sarebbe nessun aumento di forza, ma una semplice trasformazione di energia latente o potenziale in forza viva dinamica. La somma totale, determinata nelle condizioni, che noi abbiamo indicato, sarebbe sempre precisamente la medesima.

Questa ferma convinzione: che sulla nostra terra e nel sistema solare tutto intero nessuna quantità di movimento si crea, nessun accrescimento di energia deve aspettarsi, è stata allegata da alcuni filosofi come un argomento in favore della teoria conosciuta sotto il nome

di *determinismo*. La libertà umana, nel senso, in cui questa parola è comunemente intesa, turberebbe, si dice, l'equilibrio necessario della natura, generando movimenti senza contrapposti. La spontaneità, la volontà non devono essere per conseguenza che parvenze, sotto le quali si nasconde il gioco regolare delle forze in esercizio nel mondo fisico. I nostri atti ritenuti i più liberi sarebbero, a nostra insaputa, l'effetto di movimenti interni o di impulsi esterni. Giacchè bisogna prima di tutto, si osserva, che la suprema legge sulla invariabilità dell'energia sia mantenuta, e l'uomo al pari d'ogni altro agente non potrebbe alterarne l'applicazione.

A tutta prima questa estensione dei principî dinamici alle funzioni dell'attività umana non sembra, a parer mio, legittima. Le leggi su cui si basa l'obiezione dei deterministi sono state stabilite con l'osservazione diretta e questa ha valore unicamente per le manifestazioni della materia. Nessun fisico è penetrato nei misteriosi meati, in cui la volontà origina, e non ha potuto verificare, se l'eguaglianza tra l'azione e la reazione vi è esattamente mantenuta. Io non pretendo che l'uomo abbia il potere di creare il movi-

mento, ma affermo che le leggi generali della meccanica non provano il contrario. Le esperienze così istruttive, che sono state fatte sulla trasmissione della volontà, dal cervello all'estremità dei nostri organi, la scoperta così notevole di correnti elettriche, le quali accompagnerebbero tutti i nostri atti psichici e perfino i nostri pensieri più fugaci, lasciano incontestabile la formazione stessa dell'impulso primo, l'iniziativa, *quel non so che*, il quale mette la macchina in moto e causa i moti ulteriori. È a questo punto preciso che bisognerebbe dimostrare che l'operazione interna si scinde in due azioni sempre reciproche, come quelle del mondo fisico. Ora questa dimostrazione non è stata data; e ignoro, se lo sarà un giorno. In attesa di ciò, l'applicazione del principio delle forze vive manca di base e non può suggerire prova alcuna.

Ma anche se si ammette che gli animali, l'uomo in particolare, non possono creare del movimento — e io sono, per me, molto disposto ad ammetterlo — non ne risulta necessariamente, una contradizione col fatto della libertà morale. Io credo al contrario che le due proposte siano perfettamente conciliabili. Un'esame più profondo del fenomeno

risolve quest'apparente antinomia, come tenterò di dimostrarlo più oltre. In ogni caso io stimo così poco fondato il conchiudere dalle leggi dinamiche contro la libertà, come lo sarebbe il conchiudere dalla libertà contro le leggi dinamiche. Sono questi due ordini di idee distinte, tra cui mi pare chimerico il cercare punti di contatto e soprattutto analogie.

Noi non abbiamo nessuna prova diretta e formale che le leggi in vigore nel sistema solare regolino del pari gli altri sistemi dell'Universo. La mente può concepire uno stato della materia, in cui leggi differenti sarebbero applicabili.

L'illustre autore della *Philosophie positive* consigliava, forse con prudenza eccessiva, di evitare ogni speculazione su dei mondi che dovevano, come egli diceva, esserci inesplorati per sempre. Dopo di allora i progressi dell'astronomia e della fisica hanno rivelato indizi che, senza fornire dimostrazioni decisive, non potrebbero peraltro lasciare dubbioso, se non chi sia accecato da preconcetti. Già il movimento delle comete faceva riflettere quelli che consideravano con Laplace questi astri come estranei al sistema solare,

che la materia più lontana obbedisce alla gravitazione, poichè, pervenute nella sfera di attività del sole, esse si regolano come pianeti, le cui orbite sarebbero solamente molto più allungate. Queste comete sarebbero dunque prove, le quali ci rivelano ciò che avviene nelle regioni lontane dell' Universo e che ci mostrano la materia accessibile alle stesse influenze, che predominano intorno a noi. Il movimento delle stelle multiple parrà forse più significativo. Senza poter determinare rigorosamente le loro traiettorie gli astronomi hanno spinto tanto addentro le osservazioni, da inferirne che, nei loro movimenti reciproci, queste stelle obbediscono all'attrazione newtoniana, con tutti i segni di una completa reciprocità d'azione. La luce, non solamente di queste stelle, ma di tutte quelle di cui si è constatato lo spostamento nel cielo, si trasmette al nostro globo, secondo le leggi ordinarie; essa ha pure suggerito un mezzo efficace per calcolare, dai fenomeni di aberrazione, la velocità di traslazione già dedotta dalle posizioni relative dei differenti astri. Infine, ed è forse il fatto più importante, l'analisi spettrale ha rivelato nelle stelle parecchi elementi chimici esistenti sulla terra

e nel sole. Sarebbe molto strano che la medesima specie di materia si incontrasse in mondi così distanti, che essa emettesse luce, conformandosi alle medesime leggi, egualmente scomponibile con lo spettroscopio e che si trasmettesse con la stessa velocità, e che, nullameno, la materia in questi mondi remoti fosse in uno stato tanto profondamente dissimile, da non sottostare nè alla legge della gravitazione, nè alla legge di eguaglianza tra l'azione e la reazione, nè ad alcuna di quelle che costituiscono le basi della meccanica.

L'Universo o « l'insieme degli astri visibili » per prendere a prestito l'espressione di Faye [1], venendo così assimilato al sistema solare, sotto il rapporto delle forze interne, costituisce un tutto ancora più completamente isolato nello spazio indefinito. Poichè, se noi abbiamo trovato una frazione trascurabile per il valore dell'attrazione esercitata sul nostro sistema dall'insieme delle stelle, quale può essere su queste l'attrazione esercitata da altri astri, talmente lontani, che la loro luce sfugge ai nostri occhi? La notte,

(1) Opera già citata, pagina 175.

in cui sono immersi riguardo a noi deriva da una di queste due cause: o la loro distanza è troppo immensa, perchè la luce abbia potuto superarla fin dalla loro creazione; o pure essi formano congerie troppo sparse, perchè la loro luce già pervenuta sia sensibile ai nostri strumenti. Nell'un caso e nell'altro, la loro massa evidentemente non ha nessuna influenza sull' immensa agglomerazione di cui siamo parte.

L'Universo si troverebbe dunque, dal punto di vista della conservazione del movimento e dell'energia nelle identiche condizioni del nostro proprio sistema. Il suo centro di gravità, nonostante gli spostamenti individuali delle stelle che solcano lo spazio in tutti i sensi, è immobile o animato da un movimento uniforme. Le maggiori evoluzioni come le più lente metamorfosi non potrebbero alterare questo equilibrio fondamentale. I fenomeni si susseguono, le parvenze mutano, le posizioni si modificano, il cielo contemplato a grandi intervalli diventa irreconoscibile; ma ai nostri occhi la legge di costanza e di conservazione predomina e l'Universo continua a racchiudere la provvista di energia che gli è stata depositata originariamente nella sua costituzione.

## CAPITOLO VII.

### Cause possibili di dispersione dell'energia.

La conclusione che precede sembra inoppugnabile. È tale a una condizione tuttavia, che non bisogna mai perdere di vista: ed è che gli agenti della natura non si modifichino col tempo e non siano suscettibili di affievolirsi tra due epoche consecutive.

Che importerebbe, in fatti, che durante due epoche le distanze, donde le azioni dipendono si ritrovassero identicamente le medesime, se nell'intervallo il valore intrinseco fosse diminuito: se, per esempio, l'attrazione tra due corpi non avesse, alla stessa distanza, conservato la medesima intensità? È chiaro che in simil caso l'espressione numerica dell'energia sarebbe mutata.

L'importante è dunque di sapere, se tali alterazioni sono possibili nell'Universo.

Prima di proseguire, io farò notare che, anche in questa ipotesi, la quantità di mo-

vimento, definita come si è visto, non sarebbe alterata. In fatti, essa risulta da una somma algebrica di termini, gli uni positivi, gli altri negativi, la cui grandezza assoluta è indifferente, purchè restino esattamente reciproci due per due. Se dunque la legge di eguaglianza tra l'azione e la reazione non cessa di essere mantenuta (nonostante quella evoluzione nell'intensità delle forze), il totale algebrico non sarà mutato; ciascuna diminuzione di un termine positivo trovando la sua compensazione nell'accrescimento del termine negativo. In breve, tutti i movimenti parziali potrebbero rallentarsi, ma la loro somma rimarrebbe costantemente la stessa. Il centro di gravità, il cui spostamento è subordinato al valore di questa somma, continuerebbe ad essere immobile o conserverebbe la medesima velocità.

La cosa si presenta del tutto differente per la forza o energia. Questa non risulta da una somma di termini di segni contrari, invece implica la valutazione dei movimenti senza tener conto del loro segno. Se due corpi sono spinti l'uno verso l'altro da un'attrazione scambievole, la somma delle loro forze vive a ogni istante dipende dal cammino percorso, e se

in due tempi consecutivi questo cammino percorso sia lo stesso, ma l'intensità dell'attrazione sia diminuita, questa somma sarà diminuita nella stessa proporzione. Se la forza viva si cambia in un momento qualsiasi in energia fisica, calore o elettricità, questa energia anche si troverà diminuita nella stessa proporzione.

La conservazione della forza viva o dell'energia del sistema solare dipende dunque essenzialmente dalla costanza nell' intensità delle azioni interne, a cui va soggetto. Fin qui gli astronomi non hanno alcun motivo di credere che il coefficiente della gravità universale sia soggetto a variare con il tempo. La menoma diminuzione produrrebbe un cambiamento nelle rivoluzioni dei pianeti. La terra impiegherebbe un tempo maggiore a percorrere la sua orbita e gli astronomi si sarebbero certamente avveduti dell' aumento di durata dell' anno siderale. I fisici, da parte loro, come i chimici, non hanno rilevato alcun indizio tendente a far supporre, che le forze molecolari di ogni specie subiscano qualche alterazione. Non è per questa via che le cause possibili di dispersione dell'energia sembrano doversi ricercare.

Non c'è nemmeno ragione di soffermarsi ad altre cause, ravvolte ancora in grande oscurità, la cui influenza sull' energia generale sarebbe peraltro nulla o tenuissima. L' azione delle maree, ancorchè dovesse con il tempo portare, come lo prevede G. H. Darwin, un ravvicinamento della luna e della terra, e una diminuzione della forza viva di questi due astri, ripristinerebbe una quantità equivalente di energia per il calore sprigionato nel confricamento delle parti liquide contro le parti solide. Le azioni induttive tra il sole e i pianeti, studiate dal Quet, non avrebbero maggiore conseguenza, perch'esse rientrano nella categoria delle forze reciproche. Le piogge d'aeroliti possono considerarsi come apportanti alla terra, sotto forma di scossa e di calore, una porzione di forza viva eguale a quella, che essi stessi possedevano prima di toccare il suolo. Le comete, appartengano esse o non al sistema solare, non modificano la sua energia generale, o la modificano assolutamente poco, in ragione della loro massa piccolissima. Ma conviene esaminar da vicino due altre cause.

La prima risiede nella resistenza, opposta al movimento degli astri, dal mezzo nel quale

sono immersi. La questione, malgrado la sua importanza e il gran numero di fatti con cui è connessa, non è stata definitivamente risolta. Molti astronomi, con Laplace, contestano questa influenza o la considerano assolutamente trascurabile. « Allorchè la sola accelerazione del medio movimento della luna era conosciuta, dice Laplace, si poteva attribuirla alla resistenza dell'etere o alla trasmissione successiva della gravità. Ma l'analisi ci prova che queste due cause non possono produrre nessuna alterazione sensibile nei movimenti medi dei nodi e del perigeo lunare, e questo solo fatto basterebbe ad escluderle, anche quando la vera causa delle variazioni osservate in questi movimenti fosse ancora ignorata. L'accordo della teoria con le osservazioni ci prova che, se i medi movimenti della luna sono alterati da cause estranee alla gravità universale, la loro influenza è piccolissima e finora insensibile.

« Quest'accordo stabilisce in maniera sicura la costanza della durata del giorno, elemento essenziale di tutte le teorie astronomiche. Se questa durata superasse ora di un centesimo di minuto secondo quella del tempo di Ipparco, la durata del secolo attuale sa-

rebbe maggiore di allora di 365", 25..... Le osservazioni non permettono di supporre un aumento tanto considerevole; si può dunque affermare che, da Ipparco in qua, la durata di un giorno non ha variato di un centesimo di secondo [1] ».

Al contrario i fisici, per spiegare i fenomeni luminosi, caloriferi, elettrici, immaginano la presenza di un mezzo etereo, di cui è difficile non ammettere, in qualche grado, la resistenza al movimento dei corpi, se lo si crede tale da far vibrare le loro particelle. Alcuni scienziati non sono nemmeno alieni dal riconoscere negli spazi interplanetari una materia meteorica molto rarefatta, che sarebbe finora sfuggita alla condensazione progressiva della nebulosa originaria. « Ancorchè l'esistenza di un mezzo resistente, dice C. Wolf, non si sia apparentemente manifestata, se non dall'accelerazione del movimento della cometa di Encke, e non paia aver alterato i movimenti dei pianeti o dei loro satelliti dai tempi istorici; non è poi men vero, che l'opinione concorde degli astronomi ammette che gli

(1) *Exposition du système du monde*, 6ª edizione, pagina 249.

spazi interplanetari non siano assolutamente vuoti.

Newton scriveva che i movimenti dei grandi corpi celesti si conservano *più a lungo* di quello dei proiettili lanciati in aria, perchè si muovono in spazi *meno resistenti*. Migliaia di anni non bastano a rendere sensibile la resistenza del mezzo etereo, nè quella del mezzo meteorico sul movimento dei pianeti: è lecito affermare che questa resistenza è nulla e che essa non si manifesterà con uno scorciamento delle loro orbite, dopo un tempo sufficientemente lungo? [1] ».

Se la resistenza del mezzo meteorico non è certa nell'interno del sistema solare, a più forte ragione appare incerta negli immensi spazi che separano le stelle. D'altra parte questa non sarebbe là, non v'ha dubbio, che un'occasione di trasformazione della forza viva in energia fisica. Circa il mezzo etereo, se esiste, deve estendersi in tutte le parti dell'Universo visibile, poichè la luce ci è trasmessa attraverso questo mezzo.

La sua resistenza, quando si sarà ricono-

---

(1) *Les hypothèses cosmogoniques*, di C. WOLF, membro dell'Istituto, astronomo dell'Osservatorio, pag. 97.

sciuta in seno del nostro sistema, dovrà dunque essere ammessa sull'insieme degli astri del firmamento. Ma finora rimane problematica.

La seconda causa di dispersione sembra meno discutibile e più efficace. Intendo parlare della incessante irradiazione del sole e delle stelle negli spazi celesti. Il sole, per limitarsi ora ad esso, emette una quantità prodigiosa di raggi luminosi, calorifici, chimici, ecc., di cui una tenuissima parte è ricevuta dagli astri, che gravitano intorno ad esso. Si calcola che un raggio appena su sessanta milioni è intercettato dai pianeti e dai loro satelliti. Tutto il resto si sperde nello spazio, senza concorrere, almeno in apparenza, ad alcuno dei fenomeni, che ci sono familiari. Che diventa quest'enorme provvista di energia? È essa alienata per sempre e si estingue nelle vibrazioni indefinite dell'etere, come s'estendono e dileguano a poco a poco gl'increspamenti circolari prodotti sulla superficie dell'acqua dalla caduta di un corpo solido? O è essa invece restituita al sole, così da assicurare la continuità della sua irradiazione? In mancanza di questa restituzione il

sole trova esso in altre combinazioni la compensazione delle sue perdite quotidiane? La maggior parte degli scienziati propendono oggi per la prima ipotesi e accettano come un fatto la diminuzione continua del calore solare.

È difficile il darne una prova sperimentale, poichè, i periodi storici sono troppo brevi per offrire termini di paragone esatti. Laplace notava, che secondo i fenomeni della vegetazione, la temperatura terrestre e per conseguenza l'intensità dell' irradiazione solare, non aveva dovuto variare dai tempi dei Romani. Però gli uomini si sono assuefatti a considerare il nostro astro centrale come una specie di focolare inesauribile. Laplace stesso, nella sua memorabile teoria cosmogonica, s' astenne da ogni congettura sulla sorte finale serbata al sole. Ma i progressi simultanei della geologia, della termodinamica e infine dell'analisi spettrale forniscono a questo riguardo dati importanti.

Il raffreddamento graduale del nostro globo, durante i periodi anteriori, e la persistenza del calore centrale non possono più essere messi in dubbio. Geologi e fisici lo constatano in

mille modi. La terra è un astro che, dopo aver brillato di viva luce, s'è spento, e ha perduto una parte dell'energia, che possedeva all'epoca del suo splendore. Perchè dovrebbe essere altrimenti del sole, che non è, dopo tutto, se non un globo terrestre di più grandi dimensioni? L'analisi spettrale ha ritrovato gli stessi materiali nell'uno e nell'altro di questi due astri; non v'è dunque motivo di supporre che la loro origine sia differente. È ragionevole l'ammettere che, posti all'inizio, in condizioni analoghe, essi avrebbero oggi la stessa temperatura e lo stesso aspetto fisico, se il sole non fosse stato protetto dal suo immenso volume contro il raffreddamento, che ha infierito così fortemente sulla terra e sugli astri di piccole dimensioni. La sorte presente del nostro globo, la crosta e la perdita di energia che l'accompagna, sarebbe dunque la sorte riserbata al sole. L'effettuazione sarebbe questione di tempo.

La nuova termodinamica, ravvicinata alla teoria di Laplace, suffraga questa conclusione. Poichè il calore e il movimento sono suscettibili di sostituirsi vicendevolmente, perchè l'alta temperatura del sole non deriverebbe dalla condensazione della nebulosa primitiva,

che si restrinse sotto l'influenza dell'attrazione universale? Perchè, se la concezione di Laplace è giusta, il lavoro meccanico generato dal ravvicinamento graduale delle molecole non si ritroverebbe, sotto forma di calore, nell'astro consolidato? I fisici hanno tentato di calcolare la provvista di calorico sviluppata da una così gigantesca operazione. « W. Thomson ha dimostrato, dice C. Wolf, che la contrazione del sole, cominciando da che il suo volume era infinito, fino al volume che ha presentemente, genererebbe 18 milioni di anni di calore, vale a dire 18 milioni di volte il calore che quest'astro irradia oggi in un anno. A seconda che si supporrà che il sole perdesse nell'età anteriore, più o meno calore che non ne emette adesso, la teoria dinamica fisserà l'età di questo astro a un numero di anni inferiore o superiore a 18 milioni di anni [1] ».

Alcuni elementi di questo calcolo sono incerti; si potrebbe dire, per esempio che, du-

(1) *Les hypothèses cosmogoniques*, pag. 29. — La supposizione di un volume infinito della nebulosa, fatta da W. THOMSON, non muta sensibilmente le cifre che si otterrebbero con un volume che si estenda solo otto o dieci volte al di là del raggio orbitale di Nettuno.

rante i primi periodi della condensazione, le condizioni di irradiazione dovevano essere assai differenti, da quelle di oggi, si potrebbe pensare che la temperatura iniziale della materia sia stata molto bassa o molto elevata, che il volume della nebulosa sia stato immenso o relativamente ristretto. Tutto ciò farà variare la cifra della durata, ma non muterà la sostanza delle cose. Si comprenderà con questa teoria, che il sole ha ricevuto una provvista limitata di energia e questa provvista è destinata ad esaurirsi dopo un certo tempo.

I geologi trovano in generale la durata fissata dal Thomson troppo breve. I fenomeni compiutisi alla superficie della terra sembra loro aver bisogno di uno spazio di tempo sensibilmente più lungo. Secondo i calcoli meno esagerati, la formazione della crosta terrestre avrebbe impiegato circa 20 o 25 milioni di anni [1].

Queste indicazioni concordanti, senza costituire una prova inconfutabile, come lo sarebbero misure dirette e precise, non dànno

---

(1) Si veda principalmente il *Traité de Géologie* di Lapparent, pagina 1255.

però meno un'assai grande probabilità all'opinione, secondo cui l'energia del nostro sistema è in via costante di diminuzione. La concezione ardita e splendida di Kant, che ha potuto un tempo sedurre, non potrebbe più oggi essere sostenuta seriamente, quantunque sia stata rinnovata da alcuni pensatori. Se le diverse parti del sistema solare fossero effettivamente un giorno precipitate le une sulle altre, come immaginava il grande pensatore tedesco, per effetto della resistenza del mezzo etereo, o per qualsiasi altra causa, esse non potrebbero rigenerare, con l'aiuto di quell'incommensurabile urto, il calore primitivamente incorporato nella nebulosa, e fornire gli elementi di una nuova condensazione equivalente all'antica. Non solo gli astri arriverebbero al punto di contatto dopo aver perduto, per il loro strofinamento contro il mezzo, una notevole porzione della loro forza viva, ma l'energia calorifica o luminosa sarebbe in questo momento singolarmente indebolita. Per questo duplice motivo, la nebulosa ricostituita sarebbe a una temperatura molto meno elevata; i nuovi astri sarebbero animati da movimenti molto inferiori, in velocità e ampiezza, a quelli degli astri presenti.

Se poi dal nostro sistema passiamo ai diversi mondi che compongono l'Universo visibile, perverremo a conclusioni analoghe. Tutte le stelle hanno dovuto originarsi in condizioni poco diverse da quelle, in cui il sole s'è formato. Dalla constatazione di un certo numero di materiali identici e da parecchi altri punti di somiglianza gli astronomi inferiscono, che l'origine di tutti questi astri è comune e che le varie fasi si successero nell'ordine medesimo. Senza dubbio le stelle non sono pervenute allo stesso grado di raffreddamento. Se anche fossero contemporanee, esse sono dovute avanzare in questa via in un modo molto ineguale. Le più piccole, che avevano accumulato, per la contrazione nebulare, una minore quantità di calore, hanno inoltre, in ragione delle loro dimensioni ridotte, fatto perdite più rapide. La temperatura delle diverse stelle deve dunque presentare oggi differenze notevoli: ma tutte hanno subìto una perdita graduale.

L'aspetto dei cieli, osservano gli astronomi, conferma questa ipotesi. Gli astri offrono infatti tra loro delle varietà di splendore e di colore, che giustificano la loro classificazione in tre categorie:

1. Le stelle, la cui luce è assolutamente

bianca e che sembrano non aver perduto niente del loro splendore primitivo. Esse rappresentano circa il 60 per 100 della somma totale;

2. Quelle, la cui luce comincia a ingiallire e la cui temperatura ha dovuto già abbassarsi. Esse figurano per un po' più del terzo, cioè il 35 per 100. Il nostro sole, tanto abbagliante per altro, appartiene a questa categoria;

3. Infine quelle, che sono entrate addirittura nel periodo di estinzione e la cui luce è divenuta rossastra. Esse formano il 5 per 100. A questo gruppo appartengono la maggior parte delle stelle, nelle quali si è notato delle intermittenze singolari, come se fossero sul punto di spegnersi definitivamente.

« Evidentemente, dice Faye, questi tre tipi di stelle corrispondono a fasi sempre più avanzate di raffreddamento. L'idrogeno è libero nei due primi ordini; nel terzo, scompare, amalgamato com'è in alcune combinazioni [1] ».

Qual'è la sorte di questa energia, che si

---

(1) *Sur l'origine du monde*, 2ª edizione, pag. 201. Vedasi anche l'opera già citata del Rev. P. SECCHI.

sprigiona così, per irradiazione da tutto l'Universo visibile, come dal sistema solare, e di cui noi duriamo fatica a concepire l'annientamento puro e semplice? Si dilegua definitivamente nelle profondità dello spazio, o serve al mantenimento di fenomeni, di cui non abbiamo presentemente alcuna idea? La scienza è impotente a rispondere a questo quesito, e fino ad ulteriori cognizioni, noi accettiamo, senza poterla esplicare, la riduzione che si manifesta alla superficie degli astri.

Il principio dell'invariabilità dell'energia è dunque una concezione piuttosto metafisica, che scientifica. Lo studio imparziale della natura non la riconferma. Non succede per questa legge come per quella dell'eguaglianza tra l'azione e la reazione, o per quella dell'indipendenza dei movimenti. Queste ultime non sono punto subordinate al tempo e alle vicissitudini dell'Universo. Quand'anco l'intensità di tutte le forze venisse ad alterarsi, non ne conseguirebbe affatto ch'esse cessassero, in nessuna fase della loro digradazione, d'essere esattamente reciproche, nè che i movimenti si combinassero oramai secondo altre leggi. Ma il fatto della

conservazione di energia non ha gli stessi caratteri. Constatato in un periodo limitato della storia, diviene sempre meno certo, a misura che s'abbracciano i grandi periodi della cosmogonia. Lo stato vero sembra essere la dispersione, causata sia dalla resistenza del mezzo etereo, sia soprattutto dalla conservazione di quelle miriadi di luci che illuminano il cielo. L'Universo non si sottrarrebbe dunque alla legge comune: non vivrebbe, se non consumando forza e camminando verso l'esaurimento finale. Tale è per lo meno la soluzione, che la scienza moderna fa scorgere. In mancanza d'una certezza, ch'essa non potrà in vero mai fornire, essa ad ogni modo vieta l'affermazione contraria.

È una delusione per lo spirito, non bisogna dissimularlo, questo oscillamento d'un principio così conforme alle nostre tendenze naturali. Noi amiamo di acquietarci nello stabile e nel permanente. Appena la conservazione delle masse c'è stata annunziata dai chimici, appena essi ci hanno attestato la sua resistenza invincibile ad ogni distruzione, noi tosto abbiamo provato una verace soddisfazione filosofica. Per la medesima ragione avevamo accolto con alacrità le grandi leggi

del movimento, contrassegnate dal carattere di perennità, e quella della gravitazione universale, che pare egualmente sfidare gli attacchi del tempo. Ci piacerebbe anche considerare l' Universo come un immenso serbatoio di forze, nel quale tutto si assorbe e si rinnova, e che conserverebbe indefinitamente in sè la capacità di durare. Ma le recenti scoperte devono mettere in guardia contro questa opinione e impongono una grande riserva. L'energia non aumenta; da questo lato è davvero invariabile; ma forse diminuisce e niente ci prova che non accompagni il tempo nel suo corso irrevocabile.

---

# CAPITOLO VIII.

## DELLA COSTANZA DELLE LEGGI DELLA NATURA.

Ciò che s'è ora finito di dire provoca una giusta interrogazione sulla « Costanza delle leggi della natura ». Può parlarsi di costanza, allorchè si scorgono o si suppongono nell'Universo dei così grandi cambiamenti? E se le leggi non sono costanti, che diventa l'idea stessa di legge? Bisogna dunque ripudiare un adagio tanto divulgato? O se è permesso di conservarlo, quale senso allora bisogna dargli?

In maniera generale, nessuno ne dubita, la natura è subordinata a leggi. I fenomeni non si compiono a caso, accidentalmente, assumendo forme variabili e fugaci. Essi seguono regole fisse e, date le medesime circostanze, si svolgono nello stesso ordine, con le stesse fasi. Un corpo cade oggi da una certa altezza; esso non cadrà domani in maniera diversa. L'aria atmosferica compressa sviluppa

una certa forza di tensione per una data riduzione di volume; questa forza di tensione si ritroverà la stessa per un'eguale riduzione, purchè le altre condizioni non mutino.

La credenza nell'esistenza di leggi o almeno di qualche legge è antica come l'umanità. Ma non ha sempre avuto il grado di evidenza e il carattere di generalità, che oggi le attribuiamo. Nei tempi antichi le folle ignoranti e spesso anche le persone colte concedevano una larga parte al maraviglioso e al fantastico nei fenomeni fisici. Da ciò l'origine di divinità o di genî, la cui volontà o capriccio produceva i fatti più singolari e in apparenza più estranei al corso naturale delle cose. Noi ritroviamo oggi ancora la stessa tendenza nelle popolazioni selvagge. Ma nelle società civili simili aberrazioni sono rarissime. Quand'anco manchi la spiegazione di un fenomeno, quand'anco rivesta forme peculiari e sembri in contradizione con le verità acquisite, gli scienziati non sono mai proclivi a scorgervi una deviazione reale dalle leggi fisse. Essi ammettono, o che l'osservazione sia stata difettosa, o che cause ancora ignote, ma perfettamente regolari, abbiano cagionato l'apparente anomalia.

Quest'ultima circostanza, l'intervento cioè di cause ignote in opposizione con la causa conosciuta, ritarda assai spesso la determinazione esatta delle leggi e contrasta all'accordo d'una formola strettamente matematica. Poichè i fenomeni non s'offrono al nostro esame come il prodotto di una causa unica e come coefficienti a loro volta d'un effetto unico. Quasi sempre essi risultano da un concorso di cause molteplici e reagiscono in direzioni diverse. Noi non ci troviamo alla presenza di serie lineari distinte e facilmente discernibili, simili a catene, in cui ogni anello si ricongiunga esclusivamente al precedente e al seguente. Ma le serie s'incrociano; ogni anello si ricollega simultaneamente con parecchi altri e diviene così un centro di convergenza e un focolare di irradiazione di azioni numerose. La concatenazione, che produrrebbe la causa unica, è quindi difficile a indagare e a precisare. La sua azione è turbata o velata da singolari mescolanze, da ciò che potremmo chiamare *interferenze*. La forza interna sviluppata dalla compressione di un gas non dipende solamente dalla riduzione del volume, dipende anche dalla temperatura. Questa, a sua volta, non dipende solamente dalla quantità di ca-

lore fornita al gas, ma varia secondo che il gas è vicino o non al suo punto di liquefazione. Parecchie leggi si combinano dunque per determinare il fenomeno studiato, e combinandosi velano mutualmente le loro formole rispettive. Però può essere molto difficile l'ottenere l'espressione vera della legge speciale, di cui si prosegue lo studio. Questa difficoltà raddoppia, quando alcune cause concorrenti sono non soltanto mal definite, ma ignorate nella loro esistenza. Il fisico potrebbe allora esser tentato di rinunziare alla soluzione del problema, se non fosse sorretto nella sua ricerca dalla salda convinzione, che niente succede a caso e che le apparenti anomalie sono dovute al nostro sapere imperfetto.

Non è sempre necessario che due cause differenti si fondino insieme per portare il turbamento apparente e l'irregolarità. Basta che una sola causa agisca ad un tempo su parecchi corpi e che questi, in virtù della stessa legge, reagiscano gli uni sugli altri. Il movimento d'un pianeta intorno al sole è un problema dei più facili; qualunque scolaro lo risolverebbe baloccandosi, se i due astri fossero isolati nello spazio. Ma se un terzo corpo interviene, in virtù della medesima legge di at-

trazione, allora subito la questione si complica al punto da oltrepassare i mezzi dell'analisi. Reciprocamente le deviazioni dalla formola semplice possono essere l'indice, non di una correzione da introdurre nella legge supposta, ma della presenza di qualche corpo rimasto fin allora sconosciuto. È così che le Verrier fu guidato alla sua memorabile scoperta e potè assegnare a priori, con il calcolo, il posto del pianeta Nettuno. Fatti simili non si verificherebbero nella storia delle scienze, se la fede nella stabilità delle leggi non fosse radicata nella mente dei geometri e dei fisici.

Come questa opinione si concilia con i fatti indicati nel capitolo precedente la cui conoscenza è considerata a buon diritto come una delle grandi conquiste della scienza moderna? Come, da una parte, la costanza delle leggi naturali è affermata; e come, d'altra parte, ci rassegniamo all'eventuale decrescimento dell'energia nell'Universo?

Nel campo fisico, una *causa* è un fenomeno di ordine superiore, al di là del quale noi non sappiamo nè vogliamo risalire. Il moto dei corpi celesti è determinato dalla gravitazione. Ma che cosa genera la gravi-

tazione? Lo ignoriamo, ed è la ragione per cui noi accettiamo la gravitazione come causa. Un treno è tirato da una macchina a vapore. La combustione del carbon fossile è la causa diretta del lavoro compiuto dalla macchina. Noi non ricerchiamo di più, quantunque ne avessimo il mezzo, e stabiliamo la relazione tra il consumo di carbone e il peso trasportato. Noi crediamo inutile, dal punto di vista industriale, ricercare, come il carbon fossile si sia formato nei periodi geologici. In breve, le nostre osservazioni si rivolgono a fenomeni consecutivi; noi non risaliamo mai alla causa, così come l' intendono i metafisici, vale a dire al primo anello della catena, ammettendo che la catena abbia un primo anello. Noi ci fermiamo a un punto intermedio, segnato dal nostro sapere, o dai bisogni della nostra intelligenza, ed è lì che fissiamo l'origine della nostra concatenazione scientifica, e la causa *relativa* dei fenomeni, di cui studiamo la serie.

Quando si parla della costanza delle leggi, si ha di mira questi fenomeni, o il fenomeno superiore da cui procedono? S'intende affermare la permanenza delle leggi, che riconnettono ogni fenomeno al seguente, o l'invariabilità del fenomeno superiore? Ecco, per

esempio, un corpo, che cade da una certa altezza, sulla superficie del suolo. Esso acquista una velocità in rapporto con l'altezza, e gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi. Due cose bisogna distinguere: l'intensità della peso e la legge secondo la quale essa agisce. Se quest' intensità non divenisse mai più debole, la velocità acquisita dopo la caduta sarebbe allora minima e il tempo impiegato sarebbe più lungo. Ma la proporzionalità degli spazi percorsi ai quadrati dei tempi, che è la vera legge della caduta sussisterebbe sempre. La luce del sole si trasmette con una velocità di 300,000 chilometri per minuto secondo e la sua intensità, calcolata da punti diversamente distanti, decresce come il quadrato della distanza. Se, col corso dei secoli, lo splendore del sole diminuisce, come gli astronomi prevedono, l'intensità della luce ricevuta in un punto diminuirà in proporzione, ma la legge di trasmissione non sarà infirmata. La velocità sarà ancora di 300,000 chilometri al minuto secondo e la riduzione in ragione del quadrato della distanza. Gli scienziati dell'avvenire, tenendo calcolo di queste variazioni, avranno il diritto di dire che la causa o il fenomeno precedente è mutato, ma non

affermeranno certo che le leggi di natura sono differenti.

C'è un gran numero di fenomeni, che possono dar luogo a siffatto genere di considerazioni. Supponiamo che a lungo andare le azioni di cui abbiamo già fatto cenno (movimenti delle maree, induzioni elettriche, ecc.) cagionino un rallentamento nella rotazione del globo terrestre. Questo rallentamento accrescerà l'intensità sensibile della gravità, la quale è una differenza tra il peso reale e la forza centrifuga. I corpi cadranno dunque più presto o impiegheranno un numero minore di minuti secondi (attuali) per giungere in fondo alla loro caduta [1]. Ciò nullameno la legge della caduta dei corpi gravi non sarà alterata, e se si sapesse fare la correzione esatta, dovuta alla diminuzione della forza centrifuga, si ritroverebbero identicamente le stesse cifre. Supponiamo del pari che la resistenza del

---

(1) La riduzione del numero dei minuti secondi sarà doppiamente sensibile, poichè la rotazione del globo essendo rallentata, la durata del giorno siderale sarà aumentata e perciò il nuovo minuto secondo avrà un valore intrinseco maggiore. Ce ne vorrebbe quindi un numero minore per la caduta, quand'anche la durata assoluta di questa non fosse diminuita.

mezzo etereo o meteorico porti una variazione nell'orbita terrestre. La velocità angolare intorno al sole aumenterà e nel tempo stesso il raggio diminuirà. La terra, avvicinandosi al sole, riceverà una maggiore quantità di calore, e secondo che questo accrescimento piglierà o non il sopravvento sull'indebolimento dell'irradiazione solare, la terra si riscalderà o si raffredderà. Qualunque sia il senso del fenomeno, una quantità d'altri fenomeni consecutivi a loro volta se ne risentiranno. Se la terra si raffredda, l'abbassamento della colonna barometrica con l'altezza sarà più rapido, e la resistenza al movimento dei proiettili, sulla superficie del globo, sarà più forte, in ragione della densità maggiore degli strati traversati. Sarebbe peraltro inesatto affermare che la legge di questi fenomeni è variata. La colonna del barometro continuerà sempre a segnare il peso degli strati di aria superiori e la resistenza dei proiettili sarà sempre una stessa funzione della velocità e della densità del mezzo.

Infine quando noi consideriamo la dispersione dell'energia universale per irradiazione, questa grande rivoluzione stessa si compie secondo leggi non soggette a variare. Il raf-

freddamento dei focolari celesti, durante ciascuna unità di tempo, non cesserà d'essere una funzione della temperatura: dipenderà nell'istesso grado dalla natura dei materiali superficiali, dalla loro facoltà di emissione, dalla conduttibilità interna. L'uomo abbastanza sagace da discernere anticipatamente tutte queste particolarità, potrebbe anche con sicurtà predire gli abbassamenti graduali di temperatura, così come lo farebbe per una sfera metallica omogenea, sospesa nel suo laboratorio. In una parola, il cambiamento stesso è subordinato a leggi fisse. Ciò che ci sfugge è la conoscenza della legge superiore, da cui gli altri mutamenti procedono. Qui noi non penetriamo fino all'origine, onde è dato il primo impulso e noi ignoriamo la legge immutabile, secondo la quale quest'impulso si modifica col tempo. Ma l'esistenza della legge è certa, e noi siamo fermamente convinti che, anche in queste regioni inaccessibili, niente è in balìa dell'arbitrio e del caso.

Perciò la costanza delle leggi della natura deve intendersi:

Da una parte, come concatenazione di effetti consecutivi, la quale, nonostante la variazione delle cause relativamente prime, si

evolve con modi e con forme il cui tipo sembra eterno;

E d'altra parte, come alterazione di queste cause stesse, che è subordinata egualmente a leggi fisse e la cui formola, se potessimo rintracciarla, ci si manifesterebbe come indipendente dal tempo e dalle vicessitudini osservate.

Queste leggi costanti sono necessarie? Si sarebbero potute stabilire altrimenti da quello che sono? Potrebbero, a un momento dato, essere sostituite da altre leggi?

Nessuno, io credo, pone le leggi fisiche alla pari delle leggi geometriche. Non si ammette che la relazione tra la forza e la massa sia dello stesso ordine della relazione tra la circonferenza e il raggio d'un cerchio. Questo ultimo rapporto è estraneo alle realtà materiali. Noi non possiamo concepirlo differente senza demolire le basi della ragione e senza infirmare tutte le regole della logica. Ma in che cosa queste sarebbero colpite, se la forza imprimesse alla massa una velocità differente, da quella che rileviamo oggi? Quale perturbamento risentirebbe la nostra ragione, se lo sforzo eguale a 1 chilogramma, spingendo il volume di un litro d'acqua, gli facesse per-

correre in un minuto secondo uno spazio maggiore o minore di quattro volte $^{9}/_{10}$ la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre che passa per Parigi? Questo numero 4, 9 non ha niente di necessario in sè, avrebbe potuto essere egualmente 5 o 4 $^{1}/_{2}$ o qualsiasi altro numero. Se è prescritto dalla natura delle cose, noi non ne vediamo il nesso razionale. Il valore di questo rapporto resta, ai nostri occhi, contingente. Dirò altrettanto delle diverse leggi fissate dalla fisica e chimica. Che cosa impedirebbe logicamente alla capacità calorifica del ferro di essere meno distante da quella dell'acqua, o agli atomi di zolfo di combinarsi in più gran numero con quelli dell'ossigeno? Senza dubbio questi fatti sono gli effetti dell'ordine generale stabilito; ma noi immaginiano senza difficoltà, che questo ordine avrebbe potuto comportare dei dati diversi, con variazioni corrispondenti nei fenomeni. Riepilogando: le leggi della natura non hanno ai nostri occhi lo stesso carattere delle leggi matematiche, nelle quali noi non giungiamo a percepire la menoma alterazione.

Ma queste leggi, contingenti in origine, essendo oggi, come le conosciamo, potrebbero oramai mutare? La loro forma o semplice-

mente i loro coefficienti potrebbero ricevere altre espressioni? Alla nostra ragione ripugna decisamente l'ammetterlo. Come infatti l'ordine attuale, il complesso delle cose esistenti, potrebbero modificarsi in qualche punto senza l'intervento d'un fattore estraneo a questo Universo, che gli apporterebbe ciò che gli manca, per produrre il cambiamento atteso? Se l'Universo, come si crede, è presentemente posto su d'un pendìo che lo conduce verso il suo decadimento, chi lo arresterà su questo pendìo o glielo farà risalire? Donde originerà la forza, che metterà ostacolo alla dispersione d'energia o ne compenserà gli effetti? Se questa forza non esiste di già e non è compresa nell'ordine generale della natura, donde potrà sorgere? Dov'è la sua causa all'infuori della natura stessa? Qui noi entriamo in un campo estraneo al fisico e dove le speculazioni sarebbero puerili. Noi abbiamo solamente il diritto di dichiarare che l'Universo, nella sua costituzione presente, non potrebbe, senza una vera contradizione nei termini, contenere una causa capace di cambiare sè stesso e per conseguenza di far variare le sue leggi. Questa causa non potrebbe derivare, se non dal di fuori, in con-

dizioni tali, in cui la cosmogonia è incompetente.

Le leggi che noi registriamo non hanno tutte, ai nostri occhi, un pari valore. Noi le classifichiamo molto differentemente, secondo siamo in grado di ricondurle a un'espressione matematica, o secondo non sappiamo scoprire nessuna formola sufficientemente esatta. Ciò che costituisce la preminenza e l'incomparabile sovranità della legge newtoniana, non è soltanto la sua universalità, è ancor più forse la sua perfetta precisione e la sua ammirevole semplicità. Simile esempio è sfortunatamente eccezionale. Nel regno organico specialmente, siamo in generale impotenti a tracciare la forma matematica dei fenomeni. Noi siamo obbligati per lo più a formole vaghe, che non permettono il passaggio a vere equazioni, e che denotano semplicemente l'esistenza delle relazioni da noi intraviste, a traverso il labirinto delle osservazioni. Noi sentiamo, senza poterli definire, la presenza di rapporti naturali e costanti, che devono assicurare la permanenza e la regolarità delle successioni di fatti, di cui siamo testimoni. Nel regno inorganico poi riusciamo a circoscrivere me-

glio il soggetto, ma il còmpito che rimane è immenso. Il numero delle leggi puramente empiriche o fin qui ribelli a una formola costituisce ancora la massima parte.

Lo scopo della scienza è precisamente di condurre queste leggi approssimative a un grado di esattezza conciliabile con l'impiego di un'equazione algebrica. L'astronomia, la teoria del calore, quella della luce, quella dell'acustica ed altre ancora sono divenute, mercè il contributo delle generazioni passate, veri annessi delle matematiche; spesso anzi hanno arricchito queste ultime di nuovi procedimenti di calcolo, di cui hanno fatto sentire la necessità.

Questa lenta elaborazione, che tende a far passare incessantemente le nostre cognizioni dallo stato empirico allo stato esatto o razionale, incontra la sua principale difficoltà nell'incrociarsi delle serie o nella complessità dei fenomeni osservati. Fortunatamente l'esperienza mette in evidenza questo fatto generale e rassicurante: Quanto meglio una causa s'è potuta isolare, più la sua legge è semplice. La concatenazione degli effetti, dovuti a una causa unica, quando s'è pervenuti a sceverarli bene, riveste una forma propizia

all' intervento delle matematiche. Le espressioni complicate, con termini più o meno approssimativi, sono quasi sempre l' indice d'una complessità, di un' interferenza di cause diverse. La legge di gravitazione non si turba che per le piccolissime distanze, dove la sua azione propria è contrariata da forze d'altro genere. Perciò si preferisce in generale ammettere, per queste distanze, l' interferenza delle azioni molecolari, con la gravità, e conservare in questo modo alla legge newtoniana la sua universale semplicità.

L'antichità aveva detto per bocca di Pitagora: « I numeri governano il mondo. » Ciò che poteva parere allora una concezione mistica, ha assunto un significato più preciso, dopo le scoperte della scienza moderna. I nostri algoritmi e le loro combinazioni, vale a dire il linguaggio matematico, come gli uomini hanno saputo crearlo, si presta maravigliosamente ad esprimere le operazioni della natura. Tra il mondo esterno e la nostra intelligenza, si rileva una *adequazione* singolare, di cui non siamo noi gli autori. Poichè i principali di questi algoritmi e il loro uso astratto erano stati concepiti dai geometri assai

prima che la loro applicazione ai fatti materiali fosse adoperata dagli astronomi e dai fisici. Formole escogitate per speculazioni teoriche si sono trovate a un tratto in esatta corrispondenza con i fenomeni naturali e ne sono divenute l'esplicazione meglio appropriata. Questo risultato non era facile a prevedere. Chi poteva supporre che la legge delle superficie sferiche, riconosciute proporzionali ai quadrati dei loro raggi, sarebbe un giorno la legge di decrescenza della gravità e di altre forze irradianti? Chi avrebbe potuto credere che il seno geometrico avrebbe un'applicazione nell'indice della rifrazione della luce, e che l'equazione dell'iperbole equilatera esprimerebbe la legge di compressione dei gas perfetti? Chi supponeva, gettando le basi dell'aritmetica, che la serie dei numeri impari rappresenterebbe gli spazi percorsi da un corpo cadente liberamente nel vuoto, durante i periodi successivi della sua caduta?

Tutti conoscono le maravigliose speculazioni, a cui i geometri greci erano assorti sulle sezioni coniche. Apollonio di Perga aveva conquistato una gloria immortale mettendo a nudo le proprietà di queste curve, concepite nella maniera più astratta, poichè risultavano

dall' intersecazione di un cono per mezzo di un piano diversamente inclinato sull'asse. A quell' epoca le vere leggi dell' astronomia erano ignorate e dovevano continuare ad esserlo per lungo tempo ancora. Il movimento circolare era assegnato agli astri, perchè appariva « il più perfetto di tutti ». Parecchi secoli dopo un osservatore di genio, lasciando di confinarsi nelle meditazioni di tavolino, per contemplare il cielo, constata, dopo pazienti ricerche, che la traiettoria di ciascun pianeta intorno al sole, è precisamente una di queste sezioni famose, il cui studio aveva tanto sedotto l'antichità. Le curve di Apollonio divengono le leggi di Keplero. Newton, a sua volta, dimostra che la forza capace di far descrivere al pianeta una curva simile è diretta verso il sole, e che la sua intensità si uniforma alle variazioni delle superficie sferiche, di cui la distanza al sole è il raggio. Così concezioni sbocciate nel cervello dei geometri greci, sotto l' impulso di idee interamente estranee ai fenomeni della natura, appariscono, a un dato momento, come realizzate da essa, con una precisione, che non lascia più sussistere alcun dubbio sulla modo di agire della principale forza dell' Universo.

È difficile vedere in questi fatti una pura coincidenza e attribuire al caso riscontri così frequenti. Io vi trovo, quanto a me, la riconferma dell'opinione, che ho già espressa, occupandomi del calcolo infinitesimale. L'intelligenza umana e la natura rientrano in un ordine generale, in virtù del quale la prima è mirabilmente disposta a comprendere la seconda. Fin dove giunge quest'adattamento reciproco? In quali limiti esso ci inizia alla conoscenza del mondo esterno? Non bisogna esagerare i ravvicinamenti e conchiuderne poi che l'uomo possiede in sè stesso i mezzi di divinarlo. Io ho combattuto questa pretesa. L'uomo è capace di escogitare moduli, nella sfera dei quali rientreranno più tardi le leggi di certi fenomeni. Ma egli ignora queste leggi e non potrà pronunziare la loro conformità con gli archetipi da lui ideati, finchè l'osservazione non gliel'abbia svelata. Egli ha immaginato le sezioni coniche, ma non ha saputo che servivano di norma ai movimenti planetari, prima di avere studiato direttamente questi ultimi. Egli ha potuto divinare che « i numeri governano il mondo », ma ignora quali sono questi numeri, se non li ricerca diligentemente nella natura stessa. L'uomo trae vantaggio dalla sua maravigliosa

attitudine a percepire e spesso a intuire le verità fisiche, ma commetterebbe il più grave errore se, ricadendo nelle abitudini antiche, si fidasse ciecamente delle così dette armonie numeriche per affermare l'esistenza di certi corpi o per assegnar loro delle proprietà determinate. C'è, sotto questo rapporto, un abisso tra la scoperta di Le Verrier, che si basa sulla constatazione formale di una perturbazione astronomica, e il tentativo di Keplero, che cerca in una simmetria dei numeri la ragione delle deviazioni rispettive tra i pianeti e il sole. Questa specie d'induzioni sono a volte fortunatamente riconfermate dal fatto; ma quando non procedano, come quella di Le Verrier, da risultati forniti dall'osservazione, bisogna considerarle come eccezioni felici, il cui miraggio serve piuttosto a sedurre lo spirito, anzichè a guidarlo.

# NOTE.

## Nota I.

### Sulla realtà dello spazio e del tempo.

Io non ho intenzione d'entrare nel campo della metafisica. Espongo semplicemente il mio modo di pensare, circa lo spazio e il tempo. Istintivamente io ho sempre creduto alla loro realtà, senza poter assegnare altra ragione salvo l'impossibilità, in cui mi son trovato di pensare differentemente, soprattutto per ciò che riguarda lo spazio. Gli argomenti, che mi sono stati opposti, non mi hanno mai convinto, e desidero brevemente spiegarmi.

Si conosce l'obiezione classica contro la realtà dello spazio e del tempo: « Se esistessero fuori di noi, si dice, sarebbero necessariamente sostanze o attributi. Ora noi non possiamo concepirli in nessuno di questi due modi ». Ciò sembra vero e nullameno io mi

domando: Perchè lo spazio e il tempo non possono essere sostanze? Che cosa è, precisamente una sostanza? Bisognerà anzitutto cominciare dall'indicare e quindi dimostrare che lo spazio e il tempo non potrebbero appartenere a una tale categoria. Ora la definizione della sostanza non è stata mai molto chiara e lo è diventata ancor meno dopo le scoperte della scienza moderna. Si chiamerà, per esempio, sostanza l'agente misterioso, al quale i fisici hanno ricorso per spiegare i fenomeni del calore e della luce? Quest'agente, questo mezzo, questo meccanismo, come dir si voglia, esiste per altro, poichè si rivela con effetti indiscutibili. Esso è d'altra parte sfornito delle qualità, senza le quali una sostanza si concepisce difficilmente. Esso non ha peso, non ha forse massa; esso non cade direttamente sotto nessuno dei nostri sensi; in una parola, non ha niente di ciò che altra volta s'intendeva con il termine «materiale». D'altra parte non è dell'ordine spirituale, per lo meno nessuno è stato tentato di applicargli questo predicato. Si negherà quindi la sua realtà, col pretesto che non potrebbe esser subordinato sotto la categoria delle sostanze?

Si negherà parimente, e per lo stesso motivo, la realtà di quell'altro meccanismo, mercè cui la gravitazione si trasmette nelle profondità dello spazio, con una velocità incomparabilmente superiore a quella della luce e che Laplace definiva come istantanea? Il celebre Newton non credeva poter fare a meno di questo agente. Egli che aveva rivelato l'attrazione universale, scriveva al Bentley. « ... Che la gravità sia ingenita, inerente e essenziale alla materia di tal guisa, che un corpo possa agire su d'un altro corpo, a distanza, a traverso il *vuoto*, senza l'intermedio di qualche cosa per cui o a traverso cui la loro azione o la loro forza possono trasferirsi dall'uno all'altro, è per me un così grande assurdo, che io credo che nessun uomo, atto pensare con qualche competenza sui concetti filosofici, possa mai cadervi. La gravità deve essere causata da un agente, che agisce costantemente secondo certe leggi; ma questo agente è materiale o immateriale? È ciò che ho lasciato al criterio dei miei lettori [1] ».

---

(1) That gravity should be innate, inherent, and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through *a vacuum*, without the me-

La difficoltà di assegnare un posto a questi agenti è tale, che alcuni fisici, tra gli altri Hirn, che ha sviluppato magistralmente questa idea nel suo libro sulla *Constitution de l'espace céleste*, credono esser possibile immaginare una categoria nuova, che tenga il mezzo, per dir così, tra l'ordine materiale e l'ordine spirituale, e che sarebbe il gran serbatoio delle forze della natura. Questa categoria, chiamata *dinamica* da Hirn, e dalla quale egli esclude ogni idea di massa e di peso, servirebbe a stabilire le relazioni, le azioni a distanza, tra le diverse parti della materia.

Eccoci dunque assai lontani dalla sostanza, quale la concepivano gli antichi, e noi cerchiamo invano il *substratum*, che la parola per essi implicava. Non è pertanto prudente pensare con Cournot, che le categorie tradizionali

---

diation of any thing else, by and through wich their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man, who has in philosophical matters a competent faculty of thinking, can ever fall into it. Gravity must be caused by an agent acting constantly according to certain laws; but whether this agent be material or immaterial, I have left to the consideration of my readers (3. lettera a Bentley, del 25 febbraio 1692, citata da Hirn, nel suo libro: *Constitution de l'espace céleste*, 1889).

di sostanze, di attributi e di rapporti sono probabilmente incomplete e che ci sono indubbiamente delle cose che sfuggono a una simile classificazione? Il tempo e lo spazio sarebbero di questo novero; sarebbero realtà *sui generis,* come l'etere dei fisici, l'agente intermedio di Newton, il mezzo dinamico di Hirn, i quali non potrebbero subordinarsi sotto gli antichi predicamenti troppo angusti. Lo spazio e il tempo si distinguono anzi tra queste realtà trascendenti, perchè sono le più generali e le più accettate, quelle di cui l'enunciazione è meglio compresa senza lasciare nell'animo nostro alcun dubbio.

Emanuele Kant ha dato all'obiezione una forma nuova, che doveva avere e ha avuto infatti una grande considerazione, poichè si riconnette a una teoria di una capitale importanza. Nella sua discussione sulle « antinomie della ragione pura », l'illustre filosofo si studia di dimostrare che, se lo spazio e il tempo esistessero al di fuori di noi, se non fossero semplici forme della ragione, ne sorgerebbero due contradizioni, egualmente insolubili, cioè: 1° l'impossibilità di concepire sia che il mondo fosse infinito, sia che fosse limitato nello spazio; 2° l'impossibilità di con-

cepire che esso abbia avuto o non un principio nel tempo [1].

Questa duplice antinomia è così irriducibile, come pensava E. Kant, in un'epoca in cui le

---

(1) La conclusione di KANT risalta con molta evidenza nella nota seguente del suo libro *Critica della ragione pura* (tradotto da J. TISSOT, 2ª edizione volume II, pag. 137).

« L'espace est la simple forme de l'intuition extérieure (intuition formelle), mais pas un objet réel qui puisse être extérieurement perçu. L'espace, avant toutes les choses qui le déterminent (le remplissent ou le circoscrivent), ou plutôt qui donnent une *intuition empirique* d'accord avec sa forme, et qu'on appelle *espace absolu*, n'est que la simple possibilité des phénomènes extérieurs ent tant qu'ils peuvent exister en soi, ou s'ajouter encore à des phénoménes donnés. L'intuition empirique n'est donc pas composée de phénomènes et de l'espace (de la perception et de l'intuition vide). L'un n'est pas le corrélatif syntéthique de l'autre, mais l'un est seulement uni à l'autre dans une seule et même intuition empirique, comme matière et forme de cette intuition. Veut-on placer l'un de ces éléments de la connaissance externe hors de l'autre (l'espace en dehors de tous les phénomènes, il en résultera toutes sortes de déterminations vaines de l'intuition externe, qui ne sont pas cependant des perceptions possibles; par exemple un mouvement ou un repos du monde dans un espace vide infini, détermination du rapport de deux choses entre elles qui ne peut jamais être perçue, et qui est par conséquent le prédicat d'un pur être de la raison. »

scienze fisiche eran lungi dall'aver raggiunto il loro sviluppo attuale?

L'infinito dello spazio è una cosa; l'infinito della materia è un'altra. Non è illogico, a parer mio, l'ammettere insieme che lo spazio è infinito e l'Universo materiale ha dei limiti. La prima concezione ha, o sembra avere il carattere di necessità; la seconda è una questione di fatto, che noi non siamo in grado di risolvere e su cui la discussione resta libera. L'infinito dell'Universo s'impone tanto meno alla nostra ragione, in quanto gli indizi forniti dall'osservazione porterebbero piuttosto a concludere per la sua effettiva limitazione. In ogni caso essi non vi contradicono.

D'altra parte, un'antinomia, fosse pure insolubile, non costituirebbe, a mio avviso, ragione sufficiente per rigettare uno dei due termini giudicati inconciliabili. È appunto in nome di un tal principio che talune scuole giungono a negare la libertà umana, non potendola accordare con la prescienza divina, o *vice versa*. Quando due idee o due fatti sono separatamente bene provati, non è più prudente ammetterli tutti e due, anche se la loro coe-

sistenza non è esplicata? La contradizione, che noi crediamo scorgere tra di essi, può dipendere dal nostro difetto di conoscenza, o dal fatto che la nostra intelligenza non è in grado di assorgere alla verità superiore, che contiene e riunisce i due altri.

La sola antinomia di cui si ha il diritto di prevalersi è quella, che si rivela nell'ordine puramente logico, dove una delle due affermazioni implica il rigetto dell'altra. Allorchè noi ragioniamo sul *tutto* o sulla *parte*; sul *commensurabile* e sull'*incommensurabile*; sul *finito* o sull'*infinito*, un'affermazione esclude necessariamente l'altra, la stessa realtà non potendosi presentare ad un tempo sotto questo duplice aspetto. Le matematiche fanno un frequente uso di questo principio, che ha dato origine al metodo di dimostrazione detta *per assurdo*. Ma appena noi entriamo nel campo fisico, quando vogliamo discutere sulla materia, sullo spazio, sulla creazione, noi non saremo mai troppo circospetti nelle nostre affermazioni d'incompatibilità.

---

## Nota II.

### Sull' infinità dell' Universo.

L'infinità dell'Universo non apparisce punto come necessaria. La ragione prudentemente consultata non asserisce niente sul suo argomento. Le concezioni degli antichi, come ho avuto occasione di ricordare, tendevano piuttosto ad assegnargli dimensioni abbastanza ristrette.

Per dimostrare il carattere sia finito, sia infinito della creazione, si è ricorso per molto tempo ad argomenti scolastici o religiosi, che potevano riassumersi così:

« Supporre il mondo circoscritto, dicevano gli uni, è abbassare la maestà del Creatore, è manifestare un'imperfetta idea della sua potenza, è contradire agli attributi di cui ci compiaciamo rivestirlo. » O pure: « Non c'è ragione, perchè l'Universo occupi tale regione nello spazio, piuttosto che tal'altra.

Esso deve dunque occupare tutto intero lo spazio ed essere infinito come lui ».

« Se il mondo è infinito, replicavano gli altri, esso è necessario; ed essendo necessario, ha sempre esistito. Dunque non ha mai avuto un creatore. La nostra fede in Dio esige dunque che il mondo sia circoscritto ». Altri aggiungevano: « Ogni creazione in rapporto al suo autore, è di un grado inferiore: il mondo non è dunque infinito, come non è perfetto, immune da ogni male, ecc. ».

Si è poco a poco rinunciato a questi argomenti, che facevano girare la questione in un circolo vizioso, e la mente s'è rivolta alle scienze naturali.

Queste, malgrado la loro superiorità sulla scolastica, non possono procurare una soluzione formale. L'infinità dell'Universo, se è effettiva, non cade sotto l'osservazione diretta. Noi non abbracciamo mai che delle estensioni più o meno grandi. Ora un Universo vastissimo, ma circoscritto, può avere, ai nostri occhi, parvenza di un Universo infinito, senza che noi abbiamo mezzo alcuno di verificar ciò. Al contrario, un Universo infinito può apparire circoscritto; poichè talune parti possono essere tanto lontane, da non figurare nello

spettacolo che ci è offerto e sul quale solamente convergono le nostre investigazioni.

La soluzione corre rischio di rimanere eternamente insoluta. Noi possiamo al massimo sperare di giungere a dati probabili. Da qual parte sono essi? Pare più razionale, dopo la serie di indicazioni raccolte dalla scienza moderna, di ammettere l'infinità dell'Universo materiale o la sua limitazione?

Il nostro grande astronomo Francesco Arago s'è posto il quesito in questa forma: « Il numero delle stelle è finito o infinito? » Seguace — per ragioni che non manifesta — della seconda ipotesi, egli s'è studiato di conciliarla con l'aspetto del cielo e con i dati della fisica. Ecco come s'esprime:

« Se il numero delle stelle è infinito, come tutto ci porta a crederlo, non c'è una sola linea visuale tracciata dalla terra verso le regioni dello spazio, che non debba incontrare uno di questi astri [1]. Qualunque sia la picciolezza della loro estensione superficiale, le stelle

---

(1) La reciproca non è vera. Anche quando ogni raggio visuale incontrasse una stella, noi non avremmo il diritto di conchiudere che il numero di questi astri è infinito. Noi potremmo solamente dire che è grandissimo.

produrranno per la loro continuità l'aspetto di una vôlta luminosa senza nessuna parte oscura. L'intervallo compreso tra due stelle formanti questa sfera, situate a una certa distanza, sarà talora riempito da una stella situata a una distanza infinitamente maggiore, il che non impedirà che sotto il rapporto dell'intensità i fenomeni accadano, come se tutte le stelle fossero attaccate a una vôlta sferica e a pari distanza dall'osservatore. L'intensità di questa vôlta sarebbe da pertutto identica, se tutte le stelle componenti avessero lo stesso splendore intrinseco [1]. Ammettendo che questo splendore sia eguale a quello del sole, supposizione molto naturale, perchè il sole è veramente una stella, ciascuna regione del cielo di una esten-

---

(1) Questo fatto in apparenza paradossale non potrebbe far maravigliare le persone per poco familiari con le leggi dell'ottica. Esso è la conseguenza diretta del principio, in virtù del quale, la luce emanante da un punto irradiante diminuisce in proporzione del quadrato della distanza. Ma se invece di emanare da un *punto*, la luce emana da una superficie irradiante *estesa*, l'impressione prodotta sull'occhio di un osservatore è molto differente. Supponiamo in fatti la superficie tanto vasta perchè ad ogni distanza il cono formato dai raggi visuali poggi interamente su di sè senza che si discosti da nes-

sione angolare di 32′ circa ci manderebbe una quantità di luce eguale a quella, che ci viene da questo astro. Le cose si offrono a noi sotto un aspetto molto differente. Come spiegar tutto senza rinunziare all'idea d'uno spazio infinito seminato di stelle in tutta la sua estensione! »

La limitazione del numero di queste stelle sarebbe parsa la conclusione logica di questa esposizione. Ma Arago, messosi, l'ho detto, da un altro punto di vista, prosegue in questi terminini:

« È poco concepibile che i due scienziati ora nominati (Olbers e Chéseux di Losanna, che s'erano occupati antecedentemente della

---

sun lato. L'aumento della lontananza non avrà, in questo caso altro risultato, se non di far segare dal cono sulla superficie luminosa delle basi sempre più ampie e di cui l'estensione intrinseca crescerà precisamente in proporzione del quadrato della distanza. Ora, s'è già detto, la luce emanata da ciascun punto si indebolisce nella stessa proporzione; ci sarà dunque una compensazione perfetta tra questo indebolimento e il numero dei punti irradianti, di maniera che la luce fornita dalla totalità della base del cono conserverà sempre per l'osservatore la stessa intensità.

medesima questione) non abbiano nè l'uno nè l'altro avuto l'idea che, nel numero infinito di stelle, di cui suppongono lo spazio indefinito seminato, deve esservene un numero infinito di quelle totalmente oscure e opache. Questa semplice osservazione capovolge pare a me, i loro calcoli dalla base e riduce a nulla le conclusioni, che essi ne hanno dedotte. Non è forse evidente che l'insieme di tutte queste stelle oscure e opache debbano formare un involucro indefinito, all'infuori del quale niente può essere visibile, poichè i raggi di ciascuna stella situata al di là delle ultime parti costituenti questo involucro incontrano sulla loro via uno schermo, che li arresta? [1] ».

Questa spiegazione, nonostante l'autorità di Arago, non pare si debba accettare troppo di leggeri. Non solamente non concorda con la serie delle idee seguìte in cosmogonia, ma essa non dà sodisfacente ragione della grandissima ineguaglianza, che si osserva nella distribuzione degli astri luminosi. Perchè questi troverebbero dinanzi a sè tanti astri oscuri in certe regioni del cielo, e così pochi in altre?

(1) *Astronomie populaire*, volume 1 pagina 383.

Donde verrebbe il contrasto tra queste parti talmente vuote e oscure, da meritare dagli astronomi e dagli uomini di mare il nome espressivo di *sacchi di carbone* e quelle parti così popolate e brillanti, che sono state ritenute per molto tempo come materia cosmica in via di condensazione?

Gli astri oscuri, causa di queste irregolarità di aspetto, non sarebbero dunque corpi secondari, come i pianeti e i loro satelliti — poichè le loro dimensioni non corrisponderebbero a somiglianti effetti di occultazione—; ma sarebbero, come indica espressamente Arago, veri soli spenti. Come concepire due creazioni così avviluppate l'una nell'altra, una esaurita e l'altra in pieno sfolgorìo? Perchè sarebbero sorte in una medesima regione dello spazio, in due epoche così differenti? E se si ammette che gli astri spenti siano semplicemente i più antichi di una creazione unica, perchè mai vediamo noi così poche stelle rossastre o sul punto di spegnersi? Eppure dovrebbe accadere il contrario.

D'altra parte non essendo le stelle fisse, ma i loro spostamenti diventando col tempo sensibili, le posizioni reciproche degli astri oscuri e degli astri luminosi dovrebbero va-

riare incessantemente, e noi assisteremmo a frequenti comparse e scomparse di stelle. Ora questi fenomeni sono rari e mal si conciliano con la manifestazione di una causa generale che regoli il cielo nel suo insieme. Le stelle nuove hanno mutato rapidamente splendore, parecchie anzi sono subitamente scomparse, e hanno lasciato agli osservatori l'idea di una risurrezione momentanea, piuttosto che quella di una occultazione interrotta.

Due altre spiegazioni sono state proposte per giustificare l'apparenza del cielo — sempre nell'ipotesi dell'infinità dell'Universo.

La prima consiste nell'ammettere l'esistenza di un mezzo interstellare, che su sufficienti spessezze, assorbirebbe la totalità dei raggi luminosi. Ma Arago, s'è visto, la rigetta e ha creduto necessario di sostituirla, tanto gli pareva infondata. Quale potrebbe essere infatti questo mezzo interstellare d'una trasparenza imperfetta? Sarebbe forse una materia cosmica molto rarefatta, sfuggita alla condensazione generale, da cui originarono gli astri attuali? Ma se questa materia si può, a rigore, concepire in vicinanza degli astri stessi, per esempio nell'interno del nostro sistema solare — dove la sua presenza non è d'altra parte in niuna

maniera dimostrata — non la si spiega affatto negli immensi deserti, che dovrebbero stendersi tra gli ultimi astri visibili e quelli molto più lontani, di cui la luce si troverebbe così assorbita nel passaggio. In mancanza di una materia così incerta si potrebbe attribuire il fenomeno d'intercezione all'etere? Ma ripugna specialmente il supporre che il meccanismo destinato ad operare la trasmissione della luce, possa esso stesso divenire un ostacolo. La gravitazione che pure si trasmette per mezzo di un meccanismo analogo — quantunque, come si crede, incomparabilmente più rapido — non pare venirne indebolita, poichè ad ogni distanza le più precise osservazioni concordano esattamente con la legge newtoniana. È molto probabile, che la trasmissione della luce, la cui legge di decrescenza è la stessa, non sia nemmeno bene accertata. I raggi luminosi emanati dagli astri più lontani non incontrerebbero dunque altri ostacoli ad eccezione di quelli, che esistono nella loro atmosfera e nel sistema solare. Ci sarebbe là una legge *costante* che affetterebbe indistintamente la luce di tutti gli astri e che sarebbe indipendente dalla loro distanza dalla terra.

La seconda spiegazione è inferita anche

dalla lontananza. La maggior parte delle stelle sarebbero a distanze talmente grandi, che la loro luce non avrebbe avuto ancora il tempo di giungere fino a noi. Quest' ipotesi, che non ha in sè niente di strano, è tuttavia assai poco in armonia con quello che noi sappiamo dell'astronomia celeste. Secondo le ultime scoperte le stelle più lontane dalla terra, nel vasto ammasso di cui facciamo parte, quelle che sono ai confini della Via lattea, impiegherebbero circa quindicimila anni per mandarci i loro raggi [1]. D'altra parte i fisici seguaci della condensazione nebulare, quali Helmholtz e W. Thomson, attribuiscono al sistema solare un'età da quindici a venti milioni di anni. I geologi, come s'è detto, oltrepassano questo termine e reclamano una durata sensibilmente più lunga. I meno esagerati gli assegnano non meno di venti milioni di anni.

---

(1) Vedasi il libro già citato di FAYE, *Sur l'origine du monde*, 2ª edizione, pagina 181. Il sapiente astronomo valuta a trentamila anni il tempo necessario, perchè un raggio luminoso percorra nella sua maggiore dimensione l'ammasso stellare verso il centro del quale siamo situati.

Vedasi anche *Il Sole* del Rev. Padre SECCHI. La valutazione indicata al volume II, pag. 474, è analoga a quella di FAYE.

Questi dati in vero, nella mente dei loro autori, non hanno la pretesa d'essere esatti; ma rendono possibili certi riscontri.

Se la più lontana delle stelle presentemente visibile è a quindicimila anni di distanza dal nostro globo — mi si passi l'espressione — e se l'età della terra è al minimum di quindici milioni di anni, ne segue che la vôlta luminosa, di cui lo splendore non è ancora giunto fino a noi, è mille volte più lontana, che l'ultima stella del nostro ammasso stellare. Come spiegarsi un vuoto tanto enorme tra il nostro ammasso e gli ammassi più vicini, specie quando si pensa, che l'allontanamento medio dei trenta milioni di stelle conosciute corrisponde soltanto a una quindicina di anni circa? A questo modo la differenza tra le ultime stelle visibili e le stelle ancora invisibili sarebbe un milione di volte più considerevole dell'allontanamento medio delle stelle conosciute. Una tale sproporzione nel piano generale della natura pare poco verosimile [1].

---

(1) Si farà senza dubbio osservare, che a distanze molto inferiori a quelle, di cui abbiamo parlato possono trovarsi delle stelle, di cui non intravediamo la luce, non perchè non ci sia ancora pervenuta, ma perchè, a causa della lontananza, essa non fa sui nostri organi un'im-

Le difficoltà svaniscono, se ci pieghiamo ad ammettere che il numero delle stelle è presentemente limitato.

Il signor Boussinesq ha formolato un'osservazione che mi pare giustificare la stessa conclusione. « Si sa infatti, egli dice, che la legge di Newton attribuisce a due strati materiali di eguale densità un'attrazione eguale su a un atomo dato, quando, riguardo a quest'atomo, essi presentano una superficie eguale apparente, o occupano lo stesso campo angolare, e che hanno inoltre il loro spessore eguale nel verso dei raggi visuali così tracciati. Questa legge non è dunque propria a far tendere verso zero, o per lo meno verso un limite finito, l'attrazione sopportata da un atomo, secondo una certa direzione, dalla parte di tutta la materia molto lontana, che si trova all'interno di un piccolo angolo solido, avente l'atomo per cima e racchiudente tra i suoi angoli

---

pressione abbastanza viva. Questo è possibile per stelle isolate o gruppi ristretti, di cui lo splendore si attenui effettivamente, in proporzione del quadrato della distanza; ma non sarebbe vero di una superficie luminosa continua, come quella che, secondo Arago, risulterebbe da un numero infinito di stelle.

la direzione considerata; visto che questa materia si può scomporre, per sezioni trasversali, in un numero illimitato di strati di spessezza definita e di eguale grandezza apparente [1] ».

In fatti l'attrazione in un punto dello spazio non è infinita; essa ha un valore relativamente tenue. Bisogna dunque, o che la quantità totale di materia sia limitata, o che la legge di Newton cessi di essere esatta al di là di una certa distanza. Boussinesq, senza escludere direttamente la prima ipotesi, si pronunzia in favore della seconda: « A questo proposito, egli dice, osserverò che, se in effetti nessuna quantità concreta non è indefinitamente divisibile, l'attrazione esercitata su d'un corpo determinato da un altro, che se ne allontana sempre più, deve infine, dopo esser decresciuta, quanto è possibile, conforme alla legge di Newton, annullarsi nel vero senso obiettivo, quando la distanza superi un certo limite, non valutabile per noi. Questo limite sarebbe il vero raggio di at-

---

(1) *Étude sur divers points de la Philosophie des Sciences*, di BOUSSINESQ, membro dell'Accademia delle Scienze; pagina 81.

tività dell'attrazione dei due corpi. La sua valutazione permetterebbe di spiegare, nella maniera più naturale, come, nonostante l'immensa estensione dell'Universo e il valore apprezzabile della densità media della materia in tutta questa estensione, la gravità (o *forza di gravitazione*) in ciascun punto dello spazio è sempre finita, e pare oramai anche piccolissima in rapporto alle azioni esercitate, a distanze impercettibili, tra quantità di materia minime ».

I fisici accetteranno che questa maestosa legge della gravitazione universale, di cui l'espressione è così semplice e risponde tanto bene alle nostre idee sul modo di azione delle forze irradianti, la cui esattezza è stata verificata in circostanze tanto numerose e svariate, debba esser difettosa al di là di un certo grado di allontanamento dei corpi? In quanto agli astronomi la loro fiducia non pare sul punto di essere scossa. Ogni qualvolta essi rilevano la più lieve differenza tra i risultati del calcolo e quelli dell'osservazione, non accusano mai la formola di Newton; ma ammettono senz'esitare che le loro misure sono state prese male, o che hanno trascurato qualche elemento estraneo funzionante a loro insaputa.

In verità le distanze, a cui Boussinesq fa accenno, sono incomparabilmente superiori alle dimensioni del sistema solare. Nondimeno la legge verificandosi con una precisione mirabile dalla luna fino a Nettuno, vale a dire in un campo di attività, il cui raggio varia da 1 a 12000, pare, se variazioni dovessero manifestarsi più oltre, che succederebbe quasi per questa legge come per una linea che, dopo essere stata retta per un' immensa lunghezza, divenisse curva nel seguito del suo sviluppo. Si comprende che la legge cessi d'essere esatta o piuttosto di parer tale, quando i corpi s'avvicinano al contatto. Poichè possono svilupparsi tra le particelle della materia altre azioni nuove, che si sovrappongano alla gravitazione propriamente detta e ne celino gli effetti. Ma come queste azioni originerebbero quando, al contrario, i corpi s'allontanano sempre più?

L' argomento dedotto dalla indivisibilità all' infinito delle quantità concrete non è qui, secondo me, applicabile. Non si tratta, come si osserverà, di suddividere una forza suddividendo il corpo da cui proviene; in questo caso la divisione della forza si arresterebbe necessariamente là dove si ferma la divi-

sione della materia. Ma si tratta di diminuire la sua intensità, aumentando la distanza, ciò che ha la maggiore anologia con la divisione indefinita delle estensioni geometriche.

Quanto alla fievolezza dell'attrazione universale, nonostante l'enorme quantità di materia, che ne circonda, essa si spiega affatto naturalmente, se l'Universo è limitato. Poichè l'attrazione esercitata da esso sul nostro globo è del medesimo ordine della quantità di luce che ci manda, l'una e l'altra obbedendo alla legge di decrescimento in proporzione del quadrato di distanza. Ora, per effetto della loro lontananza, i trenta milioni di stelle scorte col telescopio equivalgono a 320 volte soltanto una stella di prima grandezza. Le stelle più lontane ancora, e la cui luce non c'impressiona, esercitano, per la stessa ragione, un'attrazione di poco momento.

La cosmogonia moderna ci rende proclivi nello stesso senso. Secondo la teoria di Laplace, oggi divulgata, lo spazio sarebbe stato, in una certa epoca, riempito da una materia prodigiosamente tenue e rara, comprendente allo stato di disgregazione e di diffusione estrema tutti gli elementi dei mondi futuri. Entro questo mezzo sottomessi alla legge

universale della gravitazione, e sotto l'influenza di circostanze di cui tra breve farò cenno, si sono dovuti lentamente formare centri di attrazione. La materia s'è a poco a poco raccolta intorno ai suoi centri, e così si sono sviluppati, nel caos generale, dei cumuli di parti più piene e di regioni tendenti a rarefarsi.

Questo sarebbe il primo germe dei differenti sistemi solari. Ciascuno di essi, a sua volta, ancora allo stato nebulare, sarebbe stato il focolare di un lavorìo interno analogo. Laplace, che s'era ristretto alla teoria del nostro sistema, mostra l'astro centrale nell'atto di consolidarsi sempre più, mentre i pianeti se ne distaccano successivamente per la formazione di anelli concentrici (come quei di Saturno) destinati a frantumarsi, o a condensarsi. Quest'ultimo punto della teoria presenta delle difficoltà. Nondimeno l'insieme della concezione è ammesso, con poche varianti, dalla maggior parte degli astronomi.

La gravitazione sola non basta a dare ragione di questi fenomeni. Se il caos primitivo fosse stato in quiete, gli astri generati dalla condensazione sarebbero stati immobili. « I materiali (dell'Universo), dice Faye, sotto-

posti d'altra parte alle loro attrazioni reciproche, erano da principio animati da movimenti diversi, che ne hanno provocato la dispersione in lembi o in nuvoli. Questi hanno conservato una traslazione rapida e rotazioni interne estremamente lente. Queste miriadi di lembi caotici hanno dato origine, per via di condensazione progressiva, ai diversi mondi dell'Universo ».

Appare inoltre — ed è la considerazione essenziale — che l'ammasso generale di materia doveva essere limitato. Per lo meno s'immagina a fatica la condensazione, che si infiltri in un mezzo, in cui le forze si esercitano all'infinito secondo tutte le direzioni. « Il centro dell'infinito è dovunque », dice Pascal, ciò che esclude l'idea di una interruzione d'equilibrio in un punto, piuttosto che in un altro. L'interruzione effettiva suggerisce l'ipotesi di una limitazione originaria.

Per gli astronomi l'Universo della materia, per lo meno l'Universo accessibile alle nostre osservazioni, si accentra, o press'a poco, nell'immenso aggruppamento della Via lattea. Questa costellazione unica e prodigiosa, oggetto di poetiche finzioni da parte

degli antichi, prende approssimativamente la forma di una lente. La spessezza ne è tenuissima, paragonata ad altre dimensioni. Situati, come si crede, verso il centro di questo ammasso, noi scorgiamo poche stelle, quando noi guardiamo nel senso della spessezza, e un assai maggior numero, quando guardiamo nel senso della larghezza. In questo modo si spiega la diversità d'aspetto del cielo, così luminoso sul contorno della Via lattea, così oscuro all'interno.

Ogni giorno la perfezione degli strumenti permette di scoprire nuovi astri o di poter accertarsi che sono veramente stelle quelle, che prima sembravano nebulose composte di materia cosmica. Queste scoperte hanno soprattutto luogo nel senso del piano della Via lattea e sembra per conseguenza, che si riconnettano a questa costellazione. Se i nuovi astri appartenessero a formazioni estranee, pare che si dovrebbe piuttosto scorgerle nel senso della spessezza, poichè uno strato assai più sottile di stelle ce ne separa.

D'altra parte non bisogna esagerare l'importanza di queste indicazioni. La Via lattea stessa non costituisce un tutto perfettamente circoscritto e le cui parti siano ben

ordinate. « Se si considera, dice Faye, la forma agitata di questa zona luminosa, le sue interruzioni, il suo sdoppiamento parziale in due rami distinti, o pure in ammassi isolati di cui alcuni, come i nembi di Magellano, si trovano respinti assai lontano dal piano generale, gli spazi vuoti di stelle o completamente neri, a cui la gente di mare ha dato il nome espressivo di *sacchi di carbone*, si troverà che la Via lattea, offre più analogia con un vasto anello in via di scomporsi in segmenti, brani, che con uno strato piatto e omogeneo di stelle e di nebulose ». (Pagina 214 dell'opera già citata).

Nondimeno, la considerazione ricavata dalla forma della Via lattea, per quanto vaga sia, non dev'essere trascurata. Da sola certamente costituirebbe una prova assai tenue, in favore della limitazione dell'Universo. Ma riavvicinata ad altri indizi, essa assume un valore reale. Dall'insieme vien fuori un'impressione, o a meglio dire una presunzione. In ogni caso la tesi contraria non si basa su nessun fondamento scientifico. Essa ha per sè principalmente il merito di dar slancio alla immaginazione e di soddisfare le anime religiose, a cui ripugna assegnar limiti all'opera

divina. Ed anzi ci potremmo chiedere, se anche sotto quest'ultimo punto di vista, l'idea d'un universo infinito s'imponga. Non sembrerà egli egualmente cosa reverente il pensare con Emanuele Kant, che la creazione non si fermi e che la Potenza suprema si sia riservata l'infinito del tempo per popolare l'infinito dello spazio?

---

## Nota III.

### Su d'un argomento del determinismo.

Io do qui alcuni particolari su d'una questione, che ho sfiorata in un capitolo precedente. Essa ha interessato, per il suo carattere misto, alcuni geometri insigni, De Saint-Venant, Cournot, Boussinesq. Questi scienziati hanno cercato di conciliare la conservazione dell'energia dinamica con la possibilità per l'uomo che sia origine di iniziativa e di volontà; in altri termini, essi hanno voluto dimostrare che la funzione psichica dell'uomo può essere assolutamente libera senza produrre punto energia o movimento.

De Saint-Venant e Cournot hanno affrontato il problema con metodi assai simili in sostanza. Essi sono arrivati alla conclusione che l'iniziativa dell'essere animato non implica una produzione di movimento, ma si riduce tutto al più a un « potere direttivo » o a un « potere discretivo » consistente a dar

l'impulso quasi infinitesimale, da cui tutto il resto dipende. Noi saremmo alla presenza di una disposizione analoga a quella di una macchina ben regolata, dove per mettere in movimento una forza poderosa, basterebbe troncare il tenue filo, che ritiene la prima molla o di premere il bottone che dà passaggio alla corrente di elettricità.

Ma subito un'obiezione si presenta alla mente: per quanto attenuato sia in simile caso il lavorìo che dipende dall'uomo, non è assolutamente nullo. Non si può dunque dire che l'esercizio della volontà sia affatto privo di una creazione propriamente detta.

J. Boussinesq s'è studiato di prevenire l'obiezione. In un'importante memoria, che ha richiamato l'attenzione dell'Accademia delle Scienze morali e politiche [1], egli ricorda che diversi problemi dinamici presentano dal punto di vista del calcolo, una reale indeterminatezza. Le equazioni escogitate per questo fine ammettono certe « soluzioni singolari »; il mo-

---

(1) *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, di J. Boussinesq, membro dell'Accademia delle Scienze, con prefazione di Paul Janet, membro dell'Accademia delle Scienze morali e politiche.

vimento può, in certi momenti, secondo le formole, proseguire indifferentemente in parecchie direzioni. Le curve rappresentate dell'attività interiore — supponendole tracciate — sarebbero precisamente in queste condizioni. Le loro equazioni comporterebbero di tanto in tanto, o anche continuamente, parecchie soluzioni. Il « potere direttivo » esercitato dallo spirito umano non esigerebbe quindi nessun impiego di forza; esso si limiterebbe a scartare alcune soluzioni in vantaggio di una di esse. « Un essere animato, osserva Boussinesq (pagina 40), sarebbe in conseguenza quello di cui le equazioni di movimento ammettessero delle integrali singolari, provocando, a intervalli molto vicini, o anche in maniera continua, per l'indeterminazione che farebbero nascere, l'intervento di un *principio direttivo* speciale. Questo principio direttivo, molto differente dal principio vitale delle antiche scuole, non avrebbe al suo servizio nessuna forza meccanica, che gli permettesse di lottare contro quelle, che troverebbe nel mondo; esso profitterebbe solamente della loro insufficienza, nei casi singoli qui considerati, per influire sull'effettuazione dei fenomeni. Incoscio all'inizio dell'esistenza individuale, e

del pari sempre per ciò che concerne la vita vegetativa, ma tanto più docile a una legge superiore o extra-fisica, che ci è ancora ignota, esso effettuerebbe a modo suo, in ogni animale e in ogni pianta, un tipo specifico ereditariamente trasmesso, impiegando a questo scopo materiali comuni presi dai minerali o da altri organismi. Pervenuto in seguito, nell'uomo e negli animali superiori, a un grado molto avanzato di sviluppo, e dopo aver acquistato organi sufficientemente delicati, vale a dire un sistema nervoso, esso diverrebbe sensibile a certi rapporti di questi organi col resto del suo corpo e col mondo esterno, proverebbe degli stimoli in virtù del loro reciproco urto, e imparerebbe quindi a dirigere scientemente la forza fisica per farla servire al compimento di disegni premeditati ».

Io non seguirò qui l'autore nelle dimostrazioni altamente analitiche, che dilucidano la sua tesi. Tenterò di presentare la soluzione in termini più semplici.

Il principio sperimentale invocato dai deterministi, accettato anche in tutta la sua estensione, vuole unicamente, che l'essere animato non possa creare del movimento; esso non

gli impedisce di impiegare a suo agio le energie preesistenti. Il principio non sarà dunque violato, se in tutti i suoi atti, *in quello stesso con cui egli fa la scelta*, l'uomo raggiunge un esatto equilibrio tra le energie esterne, così consumate, e il lavoro che sgorga da lui, come da una sorgente, per accrescere in apparenza il serbatoio universale. Senza produrre niente, l'uomo può essere soltanto dotato della facoltà di convertire le energie le une nelle altre, e di restituire fedelmente sotto varie forme, la quantità, che egli stesso ha ricevuta, e che ha servito al funzionamento intero della sua attività. Ora non pare dubbio che le cose si svolgano regolarmente così.

Consideriamo, per esempio, un uomo che si metta in grado di spingere un peso. Appena stabilito il contatto tra lui e il peso, i suoi organi si distendono, si appuntano, come i pezzi movibili di una macchina. Il suo corpo tutto si trasforma, come in una molla tesa, di cui un'estremità poggia sul suolo e l'altra preme contro il peso. Il suo sforzo si raddoppia, la molla si distende lentamente e l'oggetto avanza. La stessa operazione ricomincia e l'oggetto avanza di nuovo. Ogni volta c'è corrispondenza tra l'avanzamento del peso e l'impulso causato

dalla molla. Qual'è il risultato finale? Da una parte, una massa che ha acquistato una certa velocità, o che ha superato certe resistenze; dunque produzione di energia. Dall'altra, un'attività interna che ha trasformato il corpo umano in molla e da esso ha ricavato la forza necessaria per far avanzare il peso.

Questo sforzo, *contrapparte* del risultato visibile, è esso gratuito? Quest'attività si è esercitata per una specie di creazione spontanea dovuta all'uomo? No. C'è semplicemente stato un prestito fatto dalla natura. L'uomo non ha agito, non ha spinto, non ha voluto, non ha fornito infine l'energia trasmessa all'oggetto, se non consumando, gradatamente, la potenza accumulata in sè stesso da una lunga preparazione. Questa potenza si esaurirebbe rapidamente, se egli non la rinnovasse incessantemente coi mezzi che ricava dal mondo esterno, sotto forma di alimenti. Egli deve, secondo l'espressione consacrata, « rifare le sue forze ».

In questa occasione l'uomo si è comportato come una vera macchina termica, in cui le sostanze passano e si consumano per mantenere l'energia necessaria alla sua attività. Ma ciò che è vero del grossolano la-

voro dell'operaio, non lo è meno per le alte speculazioni del pensiero. Non c'è uno sforzo intellettuale, una vibrazione del cervello, che non si traduca in consumo e non richieda un prestito corrispondente dalla natura. La libertà stessa, l'iniziativa si pagano egualmente; esse causano del pari una perdita, che l'energia esterna ha ufficio di riparare. In breve: tutto ciò che costituisce la vita morale e intellettuale, come la vita fisica è incessantemente accompagnato da un consumo e da un rinnovamento. La libertà non aggiunge niente al serbatoio comune delle energie fisiche; essa è una semplice fase della loro trasformazione.

Senza dubbio quest'equilibrio perfetto tra l'attività umana e il prestito fatto dalla natura non può essere constatato ogni volta con la stessa precisione. Non è facile misurare esattamente il lavoro meccanico e il consumo che corrispondono a gradazioni lievi e fugaci del pensiero. Ma basta che l'equivalenza sia stata messa in rilievo in casi semplici, che si riavvicinano ad operazioni meccaniche, e che d'altra parte il fatto solo del consumo sia stato dimostrato come un'attività puramente cerebrale. La ragione ne inferisce

subito la possibilità di una conciliazione tra l'esercizio della libertà e il principio della conservazione dell'energia generale. Pertanto l'argomento del determinismo manca di base. Non rimane altro che un fenomeno più o meno difficile ad analizzarsi, ma per nulla affatto un'antinomia irriducibile, che esiga il sacrifizio di uno dei due termini in presenza.

FINE.

# INDICE DELLA MATERIA



### I — Analisi.



### II — Meccanica.

**Note.**



---

GIUS. LATERZA & FIGLI - EDITORI

## Biblioteca di Cultura Moderna

1.° Paolo Orano — Psicologia sociale. L. 3,00
2.° B. King e T. Okey — L'Italia d'oggi » 4,00
3.° Ettore Ciccotti — Psicologia del Movimento socialista . . . . . » 3,00
4.° G. Amadori-Virgilj — L'Istituto famigliare nelle società primordiali » 2,50
5.° A. Martin — L'Educazione del carattere . . . . . . . » 5,00
6.° G. De Lorenzo — India e Buddhismo antico . . . . . . . » 3,50
7.° V. Spinazzola — Le origini ed il cammino dell'Arte . . . . . » 3,50
8.° Remy de Gourmont — Fisica dell'Amore (*Saggio sull'istinto sessuale*) . . . . . . » 3,50
9.° C. Cassola — I sindacati industriali. *Cartelli - Pools - Trusts.* . . . » 3,50
10.° G. Marchesini — Le finzioni dell'anima. — *Saggio di Etica pedagogica* . . . . . . » 3,00
11.° E. Reich — Il successo delle Nazioni . . . . . . . . » 3,00
12.° C. Barbagallo — La fine della Grecia antica . . . . . . » 5,00
13.° F. Novati — Attraverso il Medioevo » 4,00
14.° I. E. Spingarn — La Critica letteraria nel Rinascimento . . . » 4,00
15.° T. Carlyle — Sartor Resartus . » 4,00
16.° F. Carabellese — Nord e Sud attraverso i secoli . . . . . » 3,00
17.° B. Spaventa — Da Socrate a Hegel » 4,50
18.° A. Labriola — Scritti vari di filosofia e politica a cura di B. Croce » 5,00
19.° A. I. Balfour — Le basi della fede. » 3,00
20.° C. De Freycinet — Saggio sulla Filosofia delle Scienze . . . . . » 3,50

*Di prossima pubblicazione:*

F. Nietzsche — L'Origine della tragedia.
L. Hearn — Kokoro (Il cuore delle cose giapponesi).